

Identificazione dei Modelli e Analisi dei Dati MN

Prof. G. De Nicolao

Prova scritta - 5 Maggio 2009

Cognome **Nome**.....

Matricola **Firma**.....

- Compilare a penna questo foglio all'inizio della prova.
- Durante lo svolgimento della prova, non è consentito l'uso di materiale diverso dai comuni strumenti di calcolo, scrittura e disegno.
- Le risposte devono essere scritte in modo chiaramente leggibile nello spazio immediatamente seguente ogni domanda (se necessario, a seguito di cancellature, passare sul retro).
- Le uniche risposte valide sono quelle riportate nel presente fascicolo, che va consegnato, senza fogli addizionali, al termine della prova.

1.
2.
3.
4.

1. In una partita di Monopoli siamo rimasti in due soli giocatori. Il mio avversario si trova in Piazza G. Cesare che dista 8 caselle da Viale dei Giardini e 10 caselle da Parco della Vittoria, che mi appartengono. Se il mio avversario lancia con i due dadi (6 facce ciascuno) un numero diverso da 8 e da 10, non finisce in nessuna delle mie proprietà. Ho già 4 case in entrambe le mie proprietà e posso acquistare un solo albergo (costo: 500 Euro).

Se il mio avversario finisce in Viale dei Giardini deve pagare:

- con 4 case: 3250 Euro
- con albergo: 3750 Euro

Se il mio avversario finisce in Parco della Vittoria deve pagare:

- con 4 case: 4250 Euro
- con albergo: 5000 Euro

- (a) Calcolare la probabilità che il mio avversario finisca in Viale dei Giardini
- (b) Calcolare la probabilità che il mio avversario finisca in Parco della Vittoria
- (c) Calcolare il valore atteso della mia vincita se non compro l'albergo
Suggerimento: la vincita è una V.C. discreta che può assumere solo 3 valori
- (d) Calcolare il valore atteso della mia vincita se compro l'albergo e lo colloco in Viale dei Giardini
- (e) Calcolare il valore atteso della mia vincita se compro l'albergo e lo colloco in Parco della Vittoria

2. Siano X ed Y le coordinate di un punto scelto in modo equiprobabile nel cerchio di raggio unitario centrato nell'origine.

(a) Calcolare la f.d.d. $F_R(r)$ della V.C. R , distanza del punto dall'origine (il raggio in coordinate polari).

Suggerimento: Si calcoli $P(R \leq r)$ sfruttando l'equiprobabilità dello spazio degli esiti

(b) Calcolare la d.d.p. $f_R(r)$ della V.C. R .

(c) Calcolare la f.d.d. $F_\theta(\theta)$ della V.C. θ , angolo rispetto al semiasse reale positivo (l'angolo in coordinate polari).

(d) Calcolare la d.d.p. $f_\theta(\theta)$ della V.C. θ .

(e) Dire, senza fare calcoli, ma motivando la risposta, se R e θ sono V.C. indipendenti.

3. Si considerino due V.C congiunte X ed Y .

(a) Dimostrare, riportando i passaggi che $E[\alpha X + \beta Y] = \alpha E[X] + \beta E[Y]$.

(b) Dimostrare, riportando i passaggi che se X ed Y sono indipendenti sono anche incorrelate.

(c) Dimostrare, riportando i passaggi, che, se $Var[X] = Var[Y] = \sigma^2$, allora $0 \leq Var[X + Y] \leq 4\sigma^2$.

4. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false: (Punteggio: risposta esatta =1, errore=-1, non risponde =0)

V F

(a) Se A, B, C sono eventi indipendenti, allora $P(AB|C) = P(A|B)P(B)$.

(b) Due eventi disgiunti non possono mai essere indipendenti.

(c) Sia X una V.C. di Bernoulli. Allora, $X - p$ è una V.C standardizzata.

(d) Sapendo che la somma di due dadi ha dato 7, la probabilità che il primo dado valga 6 è pari a $1/6$.

(e) Se X è una V.C. esponenziale con $E[X] = 1$, allora la mediana di X è maggiore della media.

(f) $E[XY] = E[X]E[Y]$ se e solo se $f_{XY}(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$.

(g) Se U e V sono V.C. entrambe uniformi in $[0, 1]$, allora $Y = 2U - V$ ha una ddp a trapezio in $[-1, 2]$ con $E[Y] = 1$.

(h) Siano X e Y due V.C. scalari indipendenti. Allora, $Var[2X^2 + Y^2] = 2Var[X^2] + Var[Y^2]$.

(i) Sia $V = a + \alpha X$, $W = b + \beta Y$ con $Var[X] > 0$, $Var[Y] > 0$. Allora $Cov[V, W] = Cov[X, Y]$.

(j) La somma di due V.C. esponenziali i.i.d. è una Erlang-2.