

Identificazione dei Modelli e Analisi dei Dati MN

Prof. G. De Nicolao

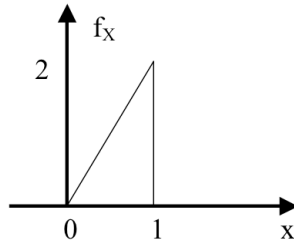
7 Novembre 2005

Cognome **Nome**.....
Matricola **Firma**.....

- Compilare a penna questo foglio all'inizio della prova.
- Durante lo svolgimento della prova, non è consentito l'uso di materiale diverso dai comuni strumenti di calcolo, scrittura e disegno.
- Le risposte devono essere scritte in modo chiaramente leggibile nello spazio immediatamente seguente ogni domanda (se necessario, a seguito di cancellature, passare sul retro).
- Le uniche risposte valide sono quelle riportate nel presente fascicolo, che va consegnato, senza fogli addizionali, al termine della prova.

1.
2.
3.
4.

1. Si consideri una V.C. X la cui d.d.p. è riportata in figura.



- (a) Calcolare $E[X]$.

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx = \int_0^1 x \cdot 2x \, dx = \frac{2}{3}$$

- (b) Calcolare $E[X^2]$.

$$E[X^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x) dx = \int_0^1 x^2 \cdot 2x \, dx = \frac{1}{2}$$

- (c) Calcolare $Var[X]$.

$$Var[X] = E[X^2] - E[X]^2 = \frac{1}{2} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{18}$$

2. Data una V.C. X ed una variabile deterministica α , dimostrare che

$$E[(X - \alpha)^2] = (E[X] - \alpha)^2 + Var[X]$$

3. Sia $\bar{X}$ la media campionaria delle V.C. i.i.d. $X_i, i = 1, \dots, n$.

(a) Calcolare $E[\bar{X}]$ riportando i passaggi.

(b) Calcolare $Var[\bar{X}]$ riportando i passaggi.

(c) Dire, motivando la risposta, quale è la d.d.p. di $\bar{X}$ per $n \rightarrow \infty$.

4. Siano date le seguenti osservazioni:

$$\begin{aligned} Y_1 &= \theta + V_1 \\ Y_2 &= 2\theta + V_2 \\ V &\sim N(0, \Sigma_V) \\ \Sigma_V &= \text{diag}\{1, 4\} \end{aligned}$$

(a) Ricavare l'espressione di θ^M in funzione delle osservazioni Y_1, Y_2 .

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \Psi = \Sigma_V, \sigma^2 = 1$$

$$\theta^M = (\Phi' \Psi^{-1} \Phi)^{-1} \Phi' \Psi^{-1} Y = \frac{Y_1}{2} + \frac{Y_2}{4}$$

(b) Ricavare $Var[\theta^M]$.

$$Var[\theta^M] = \sigma^2 (\Phi' \Psi^{-1} \Phi)^{-1} = \frac{1}{2}$$