Identificazione dei Modelli e Analisi dei Dati MN

Prof. G. De Nicolao

18 Luglio 2006

Cognome .... **Nome**..............................

Matricola.............................. **Firma**..............................

- Compilare a penna questo foglio all'inizio della prova.
- Durante lo svolgimento della prova, non è consentito l'uso di materiale diverso dai comuni strumenti di calcolo, scrittura e disegno.
- Le risposte devono essere scritte in modo chiaramente leggibile nello spazio immediatamente seguente ogni domanda (se necessario, a seguito di cancellature, passare sul retro).
- Le uniche risposte valide sono quelle riportate nel presente fascicolo, che va consegnato, senza fogli addizionali, al termine della prova.

1.	
2.	
3.	
4.	

1. Si ipotizzi che $Y = \Phi\theta^0 + V,\ E[V] = 0,\ Var[V] = \sigma^2\Psi$.

   (a) Scrivere l'espressione dello stimatore BLUE.

$$\theta^{BLUE} = CY$$

$$C = \left(\Phi'\Psi^{-1}\Phi\right)^{-1}\Phi'\Psi^{-1}$$

   (b) Dimostrare, riportando i passaggi che lo stimatore BLUE è non polarizzato.

$$\begin{aligned} E\left[\theta^{BLUE}\right] &= E\left[CY\right] \\ &= CE\left[Y\right] \\ &= C\Phi\theta^0 \\ &= \left(\Phi'\Psi^{-1}\Phi\right)^{-1}\Phi'\Psi^{-1}\Phi\theta^0 \\ &= \theta^0 \end{aligned}$$

   (c) Ricavare, riportando i passaggi, l'espressione di $Var[\theta^{BLUE}]$.

$$\begin{aligned} Var[\theta^{BLUE}] &= Var[CY] \\ &= CVar[Y]C' \\ &= \sigma^2 C\Psi C' \\ &= \sigma^2\left(\Phi'\Psi^{-1}\Phi\right)^{-1}\Phi'\Psi^{-1}\Phi\left(\Phi'\Psi^{-1}\Phi\right)^{-1} \\ &= \sigma^2\left(\Phi'\Psi^{-1}\Phi\right)^{-1} \end{aligned}$$

2. Si considerino i seguenti dati

   $u_1(0) = 1 \qquad u_1(1) = -1 \qquad u_1(2) = 1$

   $u_2(0) = -1 \qquad u_2(1) = 1 \qquad u_2(2) = 2$

   $y_1(0) = 1 \qquad y_1(1) = 2 \qquad y_1(2) = -1$

   e i modelli

   (a) $y(t) = \theta_1 + \theta_2 u_1(t) + v(t)$
   (b) $y(t) = \theta_1 u_1(t) + \theta_2 u_2(t) + v(t)$
   (c) $y(t) = \theta_1 + \theta_2 u_2(t) + v(t)$
   (d) $y(t) = \theta_1 + \theta_2 u_1(t) u_2(t)^2 + v(t)$

   dove gli errori $v(t)$ sono indipendenti con $E[v(t)] = 0$, $Var[v(0)] = Var[v(2)] = 2$, $Var[v(1)] = 1$. Si indichi con θ^{BLUE} lo stimatore BLUE di θ. Scrivere accanto alle matrici che forniscono l'inversa di $Var[\theta^{BLUE}]$ la lettera del corrispondente modello.

$$Var[\theta^{BLUE}]^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -0.5 \\ -0.5 & 3.5 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{2}$$

$$Var[\theta^{BLUE}]^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1.5 \\ 1.5 & 9.5 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{4}$$

$$Var[\theta^{BLUE}]^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1.5 \\ 1.5 & 3.5 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{3}$$

$$Var[\theta^{BLUE}]^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{1}$$

3. Data una V.C X esponenziale con parametro λ, si considerino le seguenti definizioni per Y:

1. $Y = 1/X$	*2.* $Y = \lambda X$	*3.* $Y = X/\lambda$
4. $Y = e^{-\lambda X}$	*5.* $Y = -X$	*6.* $Y = e^{\lambda X}$

Scrivere accanto alle seguenti densità il numero della definizione corrispondente.

$f_Y(y) = 1,$	$0 < y < 1$	**4**
$f_Y(y) = \lambda e^{\lambda y},$	$-\infty < y < 0$	**5**
$f_Y(y) = \lambda^2 e^{-\lambda^2 y},$	$0 < y < \infty$	**3**
$f_Y(y) = \frac{1}{y^2},$	$1 < y < \infty$	**6**
$f_Y(y) = \frac{\lambda e^{-\lambda/y}}{y^2},$	$0 < y < \infty$	**1**
$f_Y(y) = e^{-y},$	$0 < y < \infty$	**2**

4. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false: (Punteggio: risposta esatta =1, errore=-1, non risponde =0)

V F

(a) Si indichino con $\bar{A}$ e $\bar{B}$ gli eventi negati di A e B. Se A e B sono disgiunti anche $\bar{A}$ e $\bar{B}$ sono disgiunti.

☐ ☒

(b) Se lancio una moneta quattro volte, la probabilitá di ottenere almeno una testa è uguale a 15/16.

☒ ☐

(c) Se X è una V.C. di Bernoulli, allora $E[X] = E[X^2]$.

☒ ☐

(d) Dati due eventi A e B con $P(B) = 1/2$, risulta $P(A) = (P(A|B) + P(A|\bar{B}))/2$.

☒ ☐

(e) Sia X una V.C. uniforme in $[0, 1]$. Allora $E[X^2] = 1/3$.

☒ ☐