Identificazione dei Modelli e Analisi dei Dati MN

Prof. G. De Nicolao

II Prova scritta - 20 Giugno 2005

Cognome .... **Nome** ....

Matricola .... **Firma** ....

- Compilare a penna questo foglio all'inizio della prova.
- Durante lo svolgimento della prova, non è consentito l'uso di materiale diverso dai comuni strumenti di calcolo, scrittura e disegno.
- Le risposte devono essere scritte in modo chiaramente leggibile nello spazio immediatamente seguente ogni domanda (se necessario, a seguito di cancellature, passare sul retro).
- Le uniche risposte valide sono quelle riportate nel presente fascicolo, che va consegnato, senza fogli addizionali, al termine della prova.

1.
2.
3.
4.

1. A partire dai dati X_i, $i = 1, \ldots, N$ i.i.d., $X_i \sim N(m, \sigma^2)$, è stata calcolata la media campionaria $M_1 = 100$. Si considerino i seguenti casi in cui σ^2 è nota:

   1. $N = 9, \qquad \sigma^2 = 16$

   2. $N = 16, \qquad \sigma^2 = 25$

   3. $N = 25, \qquad \sigma^2 = 100$

   Si considerino inoltre altri tre casi in cui σ^2 è ignota ed è stata calcolata la varianza campionaria corretta S_c^2:

   4. $N = 9, \qquad S_c^2 = 16$

   5. $N = 16, \qquad S_c^2 = 25$

   6. $N = 25, \qquad S_c^2 = 100$

   Scrivere in corrispondenza dei seguenti intervalli di confidenza al 95% il numero del caso corretto.

   $[96.9253, 103.0747]$ ......

   $[97.3363, 102.6637]$ ......

   $[97.5500, 102.4500]$ ......

   $[95.8720, 104.1280]$ ......

   $[96.0800, 103.9200]$ ......

   $[97.3867, 102.6133]$ ......

2. (a) Enunciare la Legge dei Grandi Numeri per variabili casuali i.i.d. X_i, $i = 1, \ldots, N$.

   (b) Dimostrare che la media campionaria M_1 delle V.C. i.i.d. X_i, $i = 1, \ldots, N$ converge in probabilitá a $E[X_i]$.

3. Si considerino i seguenti dati

$$\begin{array}{lll} y(1) = 2 & y(2) = 0 & y(3) = -1 \\ u_1(1) = 1 & u_1(2) = -1 & u_1(3) = 1 \\ u_2(1) = 0 & u_2(2) = 1 & u_2(3) = 1 \end{array}$$

Si ipotizza che i dati siano generati dal seguente modello

$$y(t) = \theta_1 u_1(t) + \theta_2 u_2(t) + v(t), t = 1, 2, 3$$

dove $v(t)$ sono errori di misura i.i.d. $v(t) \sim N(0, 2)$.

(a) Calcolare la stima di Gauss-Markov di θ.

(b) Validare il modello mediante il test χ^2 con $\alpha = 0.05$.

4. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false: (Punteggio: risposta esatta =1, errore=-1, non risponde =0)

V F

(a) La convergenza in media quadratica implica quella quasi certa ma non viceversa.

□ □

(b) Date delle V.C. i.i.d. X_i, $i = 1, \ldots, N$, gaussiane, il momento campionario del terzo ordine, M_3, è asintoticamente normale.

□ □

(c) Date due V.C. X, Y, congiuntamente gaussiane con $Var[X] \neq 0$, risulta $Var[X|Y = y] = 0$ se e solo se $|r_{XY}| = 1$.

□ □

(d) Se due V.C. X, Y sono congiuntamente gaussiane, allora $Z = XY$ è gaussiana.

□ □

(e) Date delle V.C. i.i.d. X_i, $i = 1, \ldots, N$, si consideri il problema della stima di $E[X_i]$. Se le V.C. sono gaussiane, la quantitá di informazione di Fisher è N/σ.

□ □

(f) $E[(\hat{\theta} - \theta^o)^2] = Var[\hat{\theta}] + E[\hat{\theta} - \theta^o]$

□ □

(g) Date delle V.C. gaussiane i.i.d. X_i, $i = 1, \ldots, N$, la varianza campionaria S^2 è indipendente dalla media campionaria M_1.

□ □

(h) $Var[\theta^M] = (\Phi'\Psi^{-1}\Phi)^{-1}$.

□ □

(i) Si ipotizzi che $Y = \Phi\theta^o + V$, $E[V] = 0$, $Var[V] = \sigma^2\Psi$. Allora, il BLUE è gaussiano.

□ □

(j) La SSR di un modello con $k + 1$ parametri è sempre minore della SSR di un modello con k parametri.

□ □