

Identificazione dei Modelli e Analisi dei Dati

Prof. G. De Nicolao

II Prova scritta - 26 Giugno 2006

Cognome **Nome**

Matricola **Firma**

- Compilare a penna questo foglio all'inizio della prova.
- Durante lo svolgimento della prova, non è consentito l'uso di materiale diverso dai comuni strumenti di calcolo, scrittura e disegno.
- Le risposte devono essere scritte in modo chiaramente leggibile nello spazio immediatamente seguente ogni domanda (se necessario, a seguito di cancellature, passare sul retro).
- Le uniche risposte valide sono quelle riportate nel presente fascicolo, che va consegnato, senza fogli addizionali, al termine della prova.

1.
2.
3.
4.

1. Si considerino delle V.C. i.i.d. $X_i, i = 1, \dots, n$, con $X_i \sim N(m, \sigma^2)$

(a) Scrivere l'espressione del momento campionario del secondo ordine M_2 .

$$M_2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i^2$$

(b) Dimostrare, riportando i passaggi, che il momento campionario del secondo ordine M_2 è uno stimatore non polarizzato di $E[X^2]$.

$$E[M_2] = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N E[X_i^2] = \frac{Nm_2}{N} = m_2$$

(c) Dimostrare che M_2 è uno stimatore consistente.

$$Y_i = X_i^2, \quad M_2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Y_i$$

La media campionaria di Y_i è uno stimatore consistente di $E[Y_i] = E[X_i^2] = m_2 \Rightarrow$ tesi.

(d) Dimostrare che M_2 è asintoticamente gaussiano.

Per il teorema centrale del limite, la media campionaria delle Y_i è asintoticamente gaussiana.

2. A partire dai dati X_i , $i = 1, \dots, n$, i.i.d., è stata calcolata la stima $\hat{\theta}$ del parametro θ . Lo stimatore è non polarizzato e gaussiano: $\hat{\theta} \sim N(\theta, \sigma_{\hat{\theta}}^2)$. Si considerino i seguenti casi:

1. $N = 9, \quad \sigma_{\hat{\theta}}^2 = 1$

2. $N = 16, \quad \sigma_{\hat{\theta}}^2 = 4$

3. $N = 25, \quad \sigma_{\hat{\theta}}^2 = 9$

4. $N = 9, \quad \sigma_{\hat{\theta}}^2 = 16$

5. $N = 16, \quad \sigma_{\hat{\theta}}^2 = 25$

6. $N = 25, \quad \sigma_{\hat{\theta}}^2 = 36$

Scrivere in corrispondenza dei seguenti intervalli di confidenza al 95% per il parametro θ il numero del caso corretto.

[52.16, 67.84] **4**

[40.20, 59.80] **5**

[496.08, 503.92] **2**

[194.12, 205.88] **3**

[288.24, 311.76] **6**

[998.04, 1001.96] **1**

3. Si considerino i seguenti dati

$$\begin{array}{cccc} y(1) = 4 & y(2) = 5 & y(3) = 5 & y(3) = 6 \\ x(1) = -2 & x(2) = -1 & x(3) = 0 & x(4) = 3 \end{array}$$

Si ipotizza che i dati siano generati dal seguente modello

$$y(t) = \theta_1 + \theta_2 x(t) + v(t), \quad t = 1, 2, 3, 4$$

dove $v(t)$ sono errori di misura i.i.d. $v(t) \sim N(0, 2)$.

(a) Calcolare la stima di Gauss-Markov di θ .

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \Psi = I, \quad \sigma^2 = 2, \quad (\Phi' \Phi)^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 14 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\theta^M = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{14} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{14} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ \frac{5}{14} \end{bmatrix}$$

(b) Calcolare $Var[\theta^M]$.

$$Var[\theta^M] = \sigma^2 (\Phi' \Psi^{-1} \Phi)^{-1} = 2 \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{14} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{7} \end{bmatrix}$$

(c) Eseguire la validazione del modello stimato utilizzando il test χ^2 .

$$\epsilon^M := Y - \Phi \theta^M = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{70}{14} \\ \frac{5}{14} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{56}{14} \\ \frac{70}{14} \\ \frac{70}{14} \\ \frac{84}{14} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{60}{14} \\ \frac{65}{14} \\ \frac{70}{14} \\ \frac{85}{14} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{4}{14} \\ \frac{5}{14} \\ 0 \\ -\frac{1}{14} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\epsilon' \epsilon}{\sigma^2} = \frac{16 + 25 + 1}{2 \times 14^2} = 0.11 < 5.991$$

$$P(\chi_2^2 > 5.991) = 0.05 \Rightarrow \text{Modello validato}$$

4. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false: (Punteggio: risposta esatta =1, errore=-1, non risponde =0)

V F

- (a) Uno stimatore polarizzato può avere varianza minore di uno stimatore polarizzato.

☒ ☐

- (b) Dato un vettore casuale X , con $X_i, i = 1, \dots, n$, i.i.d., gaussiane standard, allora $X'X$ è una V.C. χ^2 a $n - 1$ gradi di libertà.

☐ ☒

- (c) Date due V.C. X, Y , congiuntamente gaussiane, non può mai essere $Var[X|Y = y] > Var[X]$.

☒ ☐

- (d) Se considero stimatori non polarizzati, lo stimatore a minima varianza minimizza anche l'errore quadratico medio.

☒ ☐

- (e) Dati due stimatori $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$, si supponga che $Var[\hat{\theta}_1] = 1, Var[\hat{\theta}_2] = 2, E[\hat{\theta}_1] - \theta^0 = 1.5, E[\hat{\theta}_2] - \theta^0 = 1$. Allora, $\hat{\theta}_1$ è preferibile a $\hat{\theta}_2$.

☐ ☒

- (f) Date delle V.C. i.i.d. $X_i, i = 1, \dots, N$, allora M_1 è gaussiano.

☐ ☒

- (g) Date delle V.C. i.i.d. gaussiane $X_i, i = 1, \dots, 100, Var[X_i]$ incognita, l'ampiezza dell'intervallo di confidenza al 95% per la media non dipende dai dati X_i .

☐ ☒

- (h) Si considerino due V.C. X e Y incorrelate. Se esiste y tale che $E[X|Y = y] \neq E[X]$ allora X e Y non sono gaussiane.

☒ ☐

- (i) Sotto l'ipotesi $I2$ non esiste alcuno stimatore lineare non polarizzato $\hat{\theta}$ tale che $Var[\hat{\theta}] < Var[\theta^M]$.

☒ ☐

- (j) Per lo stimatore BLUE con $\Psi = I$, risulta $FPE = \frac{n+q}{n-q} SSR$ dove n è il numero dei dati e q è il numero dei parametri.

☒ ☐

5. Il seguente codice MatLab implementa la stima BLUE di un modello lineare che predice l'altezza h in funzione del peso w (w e h sono vettori colonna). Si ipotizza $\Psi = I$. Evidenziare e correggere eventuali errori.

<pre> n = length(w); Phi = (ones(n) w); thetaBLUE+ = Phi \ h; epsilon = h - Phi * thetaBLUE; SSR = epsilon.*epsilon; sigma2hat=SSR/(n-2); Vartheta=sigma2hat*inv(Phi*Phi'); </pre>	<pre> Phi = [ones(n,1) w]; SSR = epsilon'*epsilon; Vartheta=sigma2hat*inv(Phi'*Phi); </pre>
--	---