Identificazione dei Modelli e Analisi dei Dati MN

Prof. G. De Nicolao

II prova in itinere - 27 Gennaio 2012

Cognome .... **Nome** ....

Matricola .... **Firma** ....

- Compilare a penna questo foglio all'inizio della prova.
- Durante lo svolgimento della prova, non è consentito l'uso di materiale diverso dai comuni strumenti di calcolo, scrittura e disegno.
- Le risposte devono essere scritte in modo chiaramente leggibile nello spazio immediatamente seguente ogni domanda (se necessario, a seguito di cancellature, passare sul retro).
- Le uniche risposte valide sono quelle riportate nel presente fascicolo, che va consegnato, senza fogli addizionali, al termine della prova.

1.	
2.	
3.	
4.	

1. Si considerino le seguenti V.C. indipendenti:

$$Y_1 \sim N(m, 1)$$
$$Y_2 \sim N(m, 2)$$

Si definisca $\theta^o := m$ e si considerino i seguenti stimatori:

$$\hat{\theta}_1 = \frac{Y_1 + Y_2}{2}$$
$$\hat{\theta}_2 = \frac{Y_1 + Y_2}{3}$$

(a) Calcolare media e varianza di $\hat{\theta}_1$.

(b) Calcolare media e varianza di $\hat{\theta}_2$.

(c) Per $m = 4$, dire, motivando la risposta, quale stimatore è migliore.

2. A partire dai dati X_i, $i = 1, \ldots, N$ i.i.d., $X_i \sim N(m, \sigma^2)$, è stata calcolata la media campionaria. Si considerino i seguenti casi in cui σ^2 è nota:

   1. $N = 16, \quad \sigma^2 = 1$

   2. $N = 25, \quad \sigma^2 = 4$

   3. $N = 25, \quad \sigma^2 = 9$

   Si considerino inoltre altri tre casi in cui σ^2 è ignota ed è stata calcolata la varianza campionaria S^2:

   4. $N = 16, \quad S_c^2 = 1$

   5. $N = 25, \quad S_c^2 = 4$

   6. $N = 25, \quad S_c^2 = 9$

   Si indichi con $A := U - L$ l'ampiezza dell'intervallo di confidenza al 95%, dove L e U sono, rispettivamente, il limite inferiore e superiore, vale a dire $I_{0.95} = [L, U]$. Scrivere in corrispondenza delle ampiezze, il numero del caso corretto.

   $A = 2.4768$ $\quad\ldots\ldots$

   $A = 1.5680$ $\quad\ldots\ldots$

   $A = 1.6512$ $\quad\ldots\ldots$

   $A = 0.9800$ $\quad\ldots\ldots$

   $A = 2.3520$ $\quad\ldots\ldots$

   $A = 1.0655$ $\quad\ldots\ldots$

3. Si considerino i seguenti dati

$$\begin{array}{lll} y(1) = 4 & y(2) = 6 & y(3) = 4 \\ x(1) = -1 & x(2) = 0 & x(3) = 1 \end{array}$$

Si ipotizza che i dati siano generati dal seguente modello

$$y(t) = \theta_1 + \theta_2 x(t) + v(t), \quad t = 1, 2, 3$$

dove $v(t)$ sono errori di misura i.i.d. $v(t) \sim N(0, \sigma^2)$.

(a) Calcolare la stima di Gauss-Markov di θ.

(b) Calcolare la stima di σ^2.

(c) Calcolare la stima di $Var[\theta^M]$.

(d) Dire in base al criterio FPE se il suddetto modello è preferibile al modello più semplice $y(t) = \theta_1 + v(t)$.

4. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false: (Punteggio: risposta esatta =1, errore=-1, non risponde =0)

V F

(a) Siano date le osservazioni i.i.d. X_i, $i = 1, \ldots, n$. Allora, $Var[M_1] = E[S^2]/n$.

□ □

(b) I momenti campionari centrali sono stimatori non polarizzati.

□ □

(c) L'ampiezza dell'intervallo di confidenza per la media campionaria di osservazioni i.i.d. gaussiane è inversamente proporzionale al numero n di osservazioni.

□ □

(d) Relativamente alla stima della media di osservazioni i.i.d. gaussiane, la quantità di informazione di Fisher è pari a σ^2/n.

□ □

(e) Se $X_i \sim N(0, 1)$, $i = 1, \ldots, n$, sono V.C. indipendenti, allora M_2 è distribuito come un χ^2_n.

□ □

(f) La non polarizzazione asintotica è condizione necessaria per la consistenza di uno stimatore.

□ □

(g) θ^{LS} coincide con θ^M se e solo se Ψ è diagonale.

□ □

(h) Se il numero di dati è superiore al numero di parametri, la condizione di identificabilità è sempre soddisfatta.

□ □

(i) Sotto l'Ipotesi I2 lo stimatore di Gauss Markov è lo stimatore lineare non polarizzato a minima varianza (BLUE) anche se il vettore V non è gaussiano.

□ □

(j) FPE, AIC ed MDL sono asintoticamente equivalenti.

□ □