Identificazione dei Modelli e Analisi dei Dati MN

Prof. G. De Nicolao

Prova in itinere - 29 Aprile 2008

Cognome . . . . **Nome** . . . .

Matricola . . . . **Firma** . . . .

- Compilare a penna questo foglio all'inizio della prova.
- Durante lo svolgimento della prova, non è consentito l'uso di materiale diverso dai comuni strumenti di calcolo, scrittura e disegno.
- Le risposte devono essere scritte in modo chiaramente leggibile nello spazio immediatamente seguente ogni domanda (se necessario, a seguito di cancellature, passare sul retro).
- Le uniche risposte valide sono quelle riportate nel presente fascicolo, che va consegnato, senza fogli addizionali, al termine della prova.

1.
2.
3.
4.

1.
   - Dimostrare che condizione necessaria e sufficiente affinchè X_i converga ad a in media quadratica è che siano verificate entrambe le seguenti condizioni:

$$\lim i \to \infty E[X_i] = a$$

$$\lim i \to \infty Var[X_i] = 0$$

   - Siano X_i delle V.C. i.i.d.. Dimostrare, riportando i passaggi, la Legge dei Grandi Numeri.

2. Data una V.C X uniforme nell'intervallo $[0,1]$, si considerino le seguenti definizioni per Y:

1. $Y = \log(X/2)$	*2.* $Y = \log(2X)$	*3.* $Y = 1/X$
4. $Y = 1/X^2$	*5.* $Y = 1/\sqrt{X}$	*6.* $Y = \sqrt{X}$

Scrivere accanto alle seguenti densità il numero della definizione corrispondente.

- $f_Y(y) = \frac{1}{2\sqrt{y^3}}$ #4
  $y \geq 1$

- $f_Y(y) = \frac{1}{y^2}$ #3
  $y \geq 1$

- $f_Y(y) = \frac{e^y}{2}$ #2
  $y \leq \log 2$

- $f_Y(y) = 2e^y$ #1
  $y \leq -\log 2$

- $f_Y(y) = 2y$ #6
  $0 \leq y \leq 1$

- $f_Y(y) = \frac{2}{y^3}$ #5
  $y \geq 1$

3. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false: (Punteggio: risposta esatta =1, errore=-1, non risponde =0)

V F

(a) Sia X il risultato di un dado onesto. Allora, gli eventi $A = \{X \geq 5\}$ e $B = \{X \leq 2\}$ sono indipendenti e disgiunti.

☐ ☒

(b) Ho una moneta onesta con $P(T) = 0.5$ ed un truccata con $P(T) = 1$. Scelta una moneta a caso, la lancio ed esce T. La probabilità che sia quella onesta è 2/3.

☐ ☒

(c) Si considerino delle prove di Bernoulli con $p = 0.5$. La probabilità di ottenere il primo successo al quarto tentativo è pari a 1/8.

☐ ☒

(d) Data una V.C. X uniforme in $[0, 1]$, risulta $E[X|X < 0.5] = 0.25$.

☒ ☐

(e) Sia $Y = aX + b$, con $a > 0$. Allora, $F_Y(y) = F_X(\frac{y-b}{a})$.

☒ ☐

(f) Siano X, Y due V.C. congiunte. Allora $P(X > a, Y > b) = 1 - F_X(a) - F_Y(b) + F_{XY}(a, b)$.

☒ ☐

(g) Siano X, Y due V.C. i.i.d. di tipo esponenziale. Allora $Z = X - Y$ è una Erlang-2.

☐ ☒

(h) Sia $V = X - a$, $W = Y - b$. Allora, $Cov[V, W] = Cov[X, Y]$ e $r_{VW} = r_{XY}$.

☒ ☐

(i) Siano $X_i, i = 1, \ldots, n$ delle V.C. identicamente distribuite con $\sigma^2 = Var[X_i]$. Allora, risulta sempre $Var[X_1 + \ldots + X_n] \geq n\sigma^2$.

☐ ☒

(j) Siano X, Y due V.C. congiuntamente gaussiane. Allora, $Var[Y|X = x] = \sigma_Y^2 - \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X^2}$.

☐ ☒

4. Date due V.C. V e W gaussiane standard indipendenti, si considerino le seguenti alternative per la definizione di X e Y:

   1. $X = V + 2W$, $Y = -2V - W$

   2. $X = V$, $Y = 2W$

   3. $X = 2V$, $Y = 2W$

   4. $X = V + W$, $Y = 4W$

   5. $X = V - W$, $Y = 4W$

   6. $X = V - W$, $Y = -V + W$

   Scrivere sopra gli scatter plot il numero della scelta corretta.