Identificazione dei Modelli e Analisi dei Dati

Prof. G. De Nicolao

II Prova scritta - 1 Febbraio 2016

Cognome.............................. **Nome**..............................

Matricola.............................. **Firma**..............................

- Compilare a penna questo foglio all'inizio della prova.
- Durante lo svolgimento della prova, non è consentito l'uso di materiale diverso dai comuni strumenti di calcolo, scrittura e disegno.
- Le risposte devono essere scritte in modo chiaramente leggibile nello spazio immediatamente seguente ogni domanda (se necessario, a seguito di cancellature, passare sul retro).
- Le uniche risposte valide sono quelle riportate nel presente fascicolo, che va consegnato, senza fogli addizionali, al termine della prova.

1.	
2.	
3.	
4.	

1. Si considerino le V.C. indipendenti, $X \sim N(\theta, 1)$ e $Y \sim N(2\theta, 2)$ e si consideri lo stimatore $\hat{\theta} = \alpha(X + Y)$

   (a) Calcolare $E[\hat{\theta}]$, $Var[\hat{\theta}]$ e determinare α in modo che $\hat{\theta}$ sia non polarizzato.

   (b) Dare la definizione di Mean Square Error (MSE) e calcolarlo.

   (c) Per $\theta = 1/3$, determinare α che minimizza il MSE.

2. Si considerino le V.C. indipendenti e identicamente distribuite $X_i, i = 1 \ldots n$.

   (a) Dare la definizione di momento campionario e momento campionario di ordine k.

   (b) Dimostrare che i momenti campionari sono stimatori asintoticamente gaussiani.

   (c) Dimostrare che i momenti campionari sono stimatori consistenti dei rispettivi momenti.

3. Si considerino i seguenti dati

$$\begin{array}{lll} y(1) = -3 & y(2) = 1 & y(3) = 2 \\ x(1) = -1 & x(2) = 0 & x(3) = 1 \end{array}$$

Si ipotizza che i dati siano generati dal seguente modello

$$y(t) = \theta_1 + \theta_2 x^3(t) + v(t), \quad t = 1, 2, 3$$

dove $v(t)$ sono errori di misura i.i.d. $v(t) \sim N(0, 1)$.

(a) Ricavare l'espressione di θ^{BLUE}.

(b) Ricavare $Var[\theta^{BLUE}]$.

(c) Ricavare gli intervalli di confidenza al 95% per θ_1 e θ_2.

4. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false: (Punteggio: risposta esatta =1, errore=-1, non risponde =0)

V F

(a) La somma di due V.C. congiuntamente gaussiane è gaussiana se e solo se sono incorrelate

□ □

(b) Date X ed Y congiuntamente gaussiane e incorrelate, risulta che $f_{X|Y}(x|Y=y) = f_X(x)$.

□ □

(c) Per la stima della media m di V.C. i.i.d. gaussiane $X_i \sim N(m, \sigma^2)$, la quantità di informazione di Fisher è σ^2/n.

□ □

(d) La varianza della media campionaria di V.C. i.i.d. coincide con la media della varianza campionaria noto il valor medio.

□ □

(e) Per la V.C. χ^2_n, la convergenza in distribuzione ad una normale al crescere di n è una conseguenza della Legge dei Grandi Numeri.

□ □

(f) Per V.C. i.i.d. gaussiane, la media campionaria è uno stimatore non polarizzato a minima varianza.

□ □

(g) Uno stimatore si dice non polarizzato se $\lim_{n\to\infty} E[\hat{\theta}] = \theta^o$.

□ □

(h) Sotto l'ipotesi $I1$, se σ^2 non è nota, allora θ^{BLUE} è una t di Student.

□ □

(i) Per modelli gerarchici, la somma dei quadrati dei residui del modello di ordine $k+1$ può essere minore di quella del modello di ordine k.

□ □

(j) Se due colonne di Φ sono identiche, la condizione di identificabilità non è soddisfatta.

□ □