Identificazione dei Modelli e Analisi dei Dati

Prof. G. De Nicolao

II Prova scritta - 3 Febbraio 2014

Cognome .... **Nome** ....

Matricola .... **Firma** ....

- Compilare a penna questo foglio all'inizio della prova.
- Durante lo svolgimento della prova, non è consentito l'uso di materiale diverso dai comuni strumenti di calcolo, scrittura e disegno.
- Le risposte devono essere scritte in modo chiaramente leggibile nello spazio immediatamente seguente ogni domanda (se necessario, a seguito di cancellature, passare sul retro).
- Le uniche risposte valide sono quelle riportate nel presente fascicolo, che va consegnato, senza fogli addizionali, al termine della prova.

1.
2.
3.
4.

1. Si considerino due V.C. indipendenti, $X_1 \sim N(\theta^o, 1)$, $X_2 \sim N(2\theta^o, 2)$, e lo stimatore

$$\hat{\theta} = \alpha X_1 + \beta X_2$$

   (a) Per α fissato, determinare quale condizione deve soddisfare β affinchè $\hat{\theta}$ sia non polarizzato.

   (b) Ricavare l'espressione di $Var[\hat{\theta}]$ in funzione di α e β.

   (c) Ricavare, riportando i passaggi, i valori di α e β per cui $\hat{\theta}$ è non polarizzato e a minima varianza.

2. Si consideri uno stimatore $\hat{\theta}$ di un parametro il cui valore vero è θ^o.

   (a) Dare la definizione di stimatore non polarizzato.

   (b) Dare la definizione di MSE (errore quadratico medio).

   (c) Sia $b := E[\hat{\theta}] - \theta^o$. Dimostrare, riportando i passaggi, che $MSE = b^2 + Var[\theta]$.

   (d) Ricavare il valore di b per S_2 (momento centrale campionario di ordine due).

3. Siano date le seguenti osservazioni:

$$\begin{aligned} Y_1 &= \theta + V_1 \\ Y_2 &= 2\theta + V_2 \\ V &\sim N(0, \Sigma_V) \\ \Sigma_V &= diag\{1, 4\} \end{aligned}$$

   (a) Ricavare l'espressione di θ^{BLUE} in funzione delle osservazioni Y_1, Y_2.

   (b) Ricavare $Var[\theta^{BLUE}]$.

   (c) Ricavare $Var[\theta^{LS}]$.

4. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false: (Punteggio: risposta esatta =1, errore=-1, non risponde =0)

V F

(a) Il quadrato di una V.C. gaussiana è ancora gaussiano.

□ □

(b) Date X ed Y congiuntamente gaussiane, risulta che $Var(X|Y=y)$ non dipende da y.

□ □

(c) Si considerino $X \sim (N(0,1)$ e $Y \sim (N(0,1)$ con $r_{XY} = 1$. Allora $P(X = Y)) = 1$.

□ □

(d) Il momento quadratico campionario M_2 è uno stimatore non polarizzato, consistente e asintoticamente gaussiano.

□ □

(e) L'asintotica normalità dei momenti campionari di V.C. i.i.d. è una conseguenza del Teorema Centrale del Limite.

□ □

(f) I momenti centrali campionari sono stimatori non polarizzati.

□ □

(g) Se $X_i \sim N(0,1), i = 1, \ldots 100$ sono V.C. indipendenti, $P(|\bar{X}| < 0.4) > 0.95$.

□ □

(h) Sotto l'ipotesi $I1$, se σ^2 non è nota, allora $\frac{\theta_i^M - \theta^0}{\sigma_{\theta_i^M}} \sim t_n$.

□ □

(i) Sotto l'ipotesi I1, la somma dei quadrati dei residui una V.C. chi-quadrato a n gradi di libertà.

□ □

(j) Se due righe di Φ sono tra loro proporzionali, la condizione di identificabilità non è soddisfatta.

□ □