Identificazione dei Modelli e Analisi dei Dati

Prof. G. De Nicolao

Prova scritta - 8 Maggio 2007

Cognome..... **Nome**.....

Matricola..... **Firma**.....

- Compilare a penna questo foglio all'inizio della prova.
- Durante lo svolgimento della prova, non è consentito l'uso di materiale diverso dai comuni strumenti di calcolo, scrittura e disegno.
- Le risposte devono essere scritte in modo chiaramente leggibile nello spazio immediatamente seguente ogni domanda (se necessario, a seguito di cancellature, passare sul retro).
- Le uniche risposte valide sono quelle riportate nel presente fascicolo, che va consegnato, senza fogli addizionali, al termine della prova.

1.
2.
3.
4.

1. Siano X e Y due V.C. vettoriali e A e B due matrici di dimensioni opportune. Dimostrare, riportando i passaggi, che

   $$Var[AX+BY] = AVar[X]A^T+ACov[X,Y]B^T+BCov[Y,X]A^T+BVar[Y]B^T$$

   Suggerimento: si definiscano

   $$Z := \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}, \qquad C := \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}$$

   Basta osservare che $Var[AX + BY] = Var[CZ] = CVar[Z]C^T$ e sviluppare i calcoli.

2. Una prova di esame consiste di 10 domande vero/falso. Ogni risposta esatta aggiunge un punto ed ogni errore ne toglie uno. Si supera l'esame se il punteggio complessivo è maggiore o uguale a 3. Uno studente, non avendo studiato la materia, decide di rispondere a caso.

   - Dire motivando la risposta con che probabilità supera l'esame se risponde solo alle prime 3 domande e si astiene nelle altre.

     Le risposte sono equivalenti a prove di Bernoulli con $p = 0.5$. La probabilità di dare k risposte corrette su n domande è

     $$p_n(k) = \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) (0.5)^n$$

     La probabilità di superare l'esame rispondendo solo alle prime 3 domande è pari alla probabilità di avere 3 successi su 3 prove:

     $$p_3(3) = \left(\begin{array}{c} 3 \\ 3 \end{array} \right) (0.5)^3 = \frac{1}{8}$$

   - Dire motivando la risposta con che probabilità supera l'esame se risponde solo alle prime 4 domande e si astiene nelle altre.

     La probabilità di superare l'esame è pari alla probabilità di avere 4 successi su 4 prove:

     $$p_4(4) = \left(\begin{array}{c} 4 \\ 4 \end{array} \right) (0.5)^4 = \frac{1}{16}$$

   - Dire motivando la risposta con che probabilità supera l'esame se risponde solo alle prime 5 domande e si astiene nelle altre.

     La probabilità di superare l'esame è pari alla probabilità di avere 4 o 5 successi su 5 prove:

     $$p_5(5) + p_5(4) = \left(\begin{array}{c} 5 \\ 5 \end{array} \right) (0.5)^5 + \left(\begin{array}{c} 5 \\ 4 \end{array} \right) (0.5)^5 = \frac{1}{32} + \frac{5}{32} = \frac{3}{16}$$

   - Scrivere, motivando la risposta, la formula che fornisce la probabilità di superare l'esame se risponde alle prime k domande, con $k \geq 3$.

     $$\sum_{i=a}^{k} p_k(i)$$

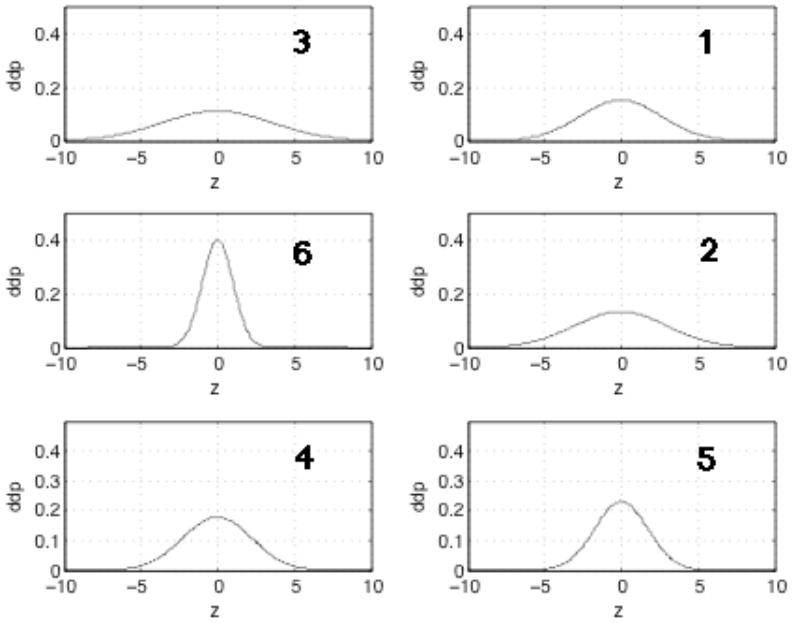
     dove $a = \mathrm{INT}(4 + k)/2$.

3. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false: (Punteggio: risposta esatta =1, errore=-1, non risponde =0)

	V	F
(a) Se A e B sono eventi disgiunti, allora $P(B) \geq 1 - P(A)$.	☐	☒
(b) La probabilità di ottenere un solo successo in n prove di Bernoulli è $np(1-p)^{(n-1)}$.	☒	☐
(c) Se A e B sono eventi disgiunti, allora $P(A+B+C) = P(A)+P(B)+P(C)-P(AC)-P(BC)$.	☒	☐
(d) Data una V.C. X, se $f_X(x)$ è una funzione pari e la media esiste, allora media e mediana coincidono.	☒	☐
(e) Sia $Y = \ln X$, dove X è una V.C. uniforme in $(0,1)$. Allora, $f_Y(y) = e^y$, $y < 0$.	☒	☐
(f) Se X è una V.C. uniforme in $[0,\pi]$, allora $E[\cos(X)] = 0$.	☒	☐
(g) $Cov[X,Y] = E[XY]-E[X]E[Y]$ se e solo se X e Y sono indipendenti.	☐	☒
(h) Le coordinate X e Y di un punto scelto in modo equiprobabile in un cerchio di raggio 1 sono indipendenti.	☐	☒
(i) $P(x_1 < X \leq x_2, y_1 < Y \leq y_2) = F_{XY}(x_2,y_2) - F_{XY}(x_1,y_1)$.	☐	☒
(j) $E[g(X)+h(Y)] = E[g(X)] + E[h(Y)]$ se e solo se X e Y sono indipendenti.	☐	☒

4. Date due V.C. X e Y congiuntamente gaussiane con $E[X] = E[Y] = 0$, $Var[X] = 3$, $Var[Y] = 4$, si considerino le seguenti alternative per la definizione di σ_{XY}:

1.	$\sigma_{XY} = 0$	*2.*	$\sigma_{XY} = 1$	*3.*	$\sigma_{XY} = 3$
4.	$\sigma_{XY} = -1$	*5.*	$\sigma_{XY} = -2$	*6.*	$\sigma_{XY} = -3$

   Avendo definito $Z = X + Y$, scrivere sopra i grafici della d.d.p. $f_Z(z)$, il numero della scelta corretta.

   NOTA: la somma di V.C. congiuntamente gaussiane è anch'essa gaussiana.