Identificazione dei Modelli e Analisi dei Dati

Prof. G. De Nicolao

II Prova scritta - 14 Gennaio 2013

Cognome .... **Nome**..............................

Matricola.............................. **Firma**..............................

- Compilare a penna questo foglio all'inizio della prova.
- Durante lo svolgimento della prova, non è consentito l'uso di materiale diverso dai comuni strumenti di calcolo, scrittura e disegno.
- Le risposte devono essere scritte in modo chiaramente leggibile nello spazio immediatamente seguente ogni domanda (se necessario, a seguito di cancellature, passare sul retro).
- Le uniche risposte valide sono quelle riportate nel presente fascicolo, che va consegnato, senza fogli addizionali, al termine della prova.

1.	
2.	
3.	
4.	

1. Si considerino delle V.C. i.i.d. X_i, $i = 1, \ldots, n$ con $E[X_i] = m$, $Var[X_i] = \sigma^2$

   (a) Calcolare, riportando i passaggi, il valore di $E[S_m^2]$, dove S_m^2 indica la varianza campionaria noto il valor medio.

   (b) Calcolare, riportando i passaggi, il valore di $E[S_2]$, dove S_2 indica il momento centrale campionario di ordine due.

2. Si considerino delle V.C. $Y_i = \theta^o + V_i$, $i = 1, \dots, n$, dove V_i sono V.C. incorrelate e $E[V_i] = 0$, $Var[V_i] = \sigma_i^2$.

   (a) Si consideri lo stimatore

   $$\hat{\theta}_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Y_i$$

   Dire, motivando la risposta, se $\hat{\theta}_1$ è non polarizzato e calcolare $Var[\hat{\theta}_1]$.

   (b) Si consideri lo stimatore

   $$\hat{\theta}_1 = \sum_{i=1}^{n} w_i Y_i, w_i = \frac{\frac{1}{\sigma_i^2}}{\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\sigma_j^2}}$$

   Dire, motivando la risposta, se $\hat{\theta}_2$ è non polarizzato e calcolare $Var[\hat{\theta}_2]$.

   (c) Dire, motivando la risposta, quale dei due stimatori corrisponde a θ^{LS} e quale a θ^{BLUE}.

3. Si considerino i seguenti dati

$$\begin{array}{lll} y(1) = 2 & y(2) = 0 & y(3) = -1 \\ u_1(1) = 1 & u_1(2) = -1 & u_1(3) = 1 \\ u_2(1) = 0 & u_2(2) = 1 & u_2(3) = 1 \end{array}$$

Si ipotizza che i dati siano generati dal seguente modello

$$y(t) = \theta_1 u_1(t) + \theta_2 u_2(t) + v(t), t = 1, 2, 3$$

dove $v(t)$ sono errori di misura i.i.d. $v(t) \sim N(0, 2)$.

(a) Calcolare la stima di Gauss-Markov di θ.

(b) Validare il modello mediante il test χ^2 con $\alpha = 0.05$.

4. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false: (Punteggio: risposta esatta =1, errore=-1, non risponde =0)

$V \quad F$

(a) Sotto l'ipotesi I2 con $Var[V] = \sigma^2 I$, risulta $E[SSR] = (n-q)\sigma^2$.

□ □

(b) Date delle V.C. i.i.d. X_i, $i = 1, \ldots, N$, il momento campionario del terzo ordine, M_3, è asintoticamente normale.

□ □

(c) Date due V.C. scalari X, Y, congiuntamente gaussiane con $Var[X] \neq 0$, risulta $Var[X|Y=y] = 0$ se e solo se $|r_{XY}| = 1$.

□ □

(d) Se $\lim_{N\to\infty} E[(\hat{\theta} - \theta^o)^2] = 0$, allora $\hat{\theta}$ è consistente.

□ □

(e) Date delle V.C. i.i.d. gaussiane standard X_i, $i = 1, \ldots, n$, $E[M_2] = 1$.

□ □

(f) Se $\lim_{N\to\infty} Var[\hat{\theta}] = 0$, allora $\hat{\theta}$ è consistente.

□ □

(g) Date delle V.C. i.i.d. gaussiane X_i, $i = 1, \ldots, 100$, $Var[X_i]$ incognita, l'ampiezza dell'intervallo di confidenza al 95% per la media non dipende dai dati X_i.

□ □

(h) $Var[\theta^M] = (\Phi'\Psi^{-1}\Phi)^{-1}$.

□ □

(i) Date delle V.C. i.i.d. X_i, $i = 1, \ldots, N$, allora M_1 è gaussiano.

□ □

(j) Dato un vettore casuale X, con $X_i, i = 1, \ldots, n$, i.i.d., gaussiane standard, allora $X'X$ è una V.C. χ^2 a n gradi di libertá.

□ □