Identificazione dei Modelli e Analisi dei Dati

Prof. G. De Nicolao

II Prova scritta - 22 Giugno 2005

Cognome .... **Nome** ....

Matricola .... **Firma** ....

- Compilare a penna questo foglio all'inizio della prova.
- Durante lo svolgimento della prova, non è consentito l'uso di materiale diverso dai comuni strumenti di calcolo, scrittura e disegno.
- Le risposte devono essere scritte in modo chiaramente leggibile nello spazio immediatamente seguente ogni domanda (se necessario, a seguito di cancellature, passare sul retro).
- Le uniche risposte valide sono quelle riportate nel presente fascicolo, che va consegnato, senza fogli addizionali, al termine della prova.

1.	
2.	
3.	
4.	

1. Si considerino delle V.C. i.i.d. X_i, $i = 1, \ldots, N$ con $E[X_i] = m$, $Var[X_i] = \sigma^2$

   (a) Calcolare, riportando i passaggi, il valore di $E[S_m^2]$, dove S_m^2 indica la varianza campionaria noto il valor medio.

   (b) Calcolare, riportando i passaggi, il valore di $E[S^2]$, dove S^2 indica la varianza campionaria (non corretta).

2. Si considerino le seguenti V.C. indipendenti:

$$Y_1 \sim N(m, 1)$$
$$Y_2 \sim N(m, 2)$$

Si definisca $\theta^o := m$ e si considerino i seguenti stimatori:

$$\hat{\theta}_1 = \frac{Y_1 + Y_2}{2}$$
$$\hat{\theta}_2 = \frac{2}{3}Y_1 + \frac{1}{3}Y_2$$

(a) Calcolare media e varianza di $\hat{\theta}_1$.

(b) Calcolare media e varianza di $\hat{\theta}_2$.

(c) Dire, motivando la risposta, quale stimatore è migliore.

3. Si considerino i seguenti dati

$$\begin{array}{lll} y(1) = 4 & y(2) = 5 & y(3) = 5 \\ x(1) = -1 & x(2) = 0 & x(3) = 1 \end{array}$$

Si ipotizza che i dati siano generati dal seguente modello

$$y(t) = \theta_1 + \theta_2 x(t) + v(t), \quad t = 1, 2, 3$$

dove $v(t)$ sono errori di misura i.i.d. $v(t) \sim N(0, 1)$.

(a) Calcolare la stima di Gauss-Markov di θ.

(b) Calcolare $Var[\theta^M]$.

(c) Calcolare l'intervallo di confidenza al 95% per θ_2.

(d) Dire in base alla risposta precedente se il suddetto modello è preferibile al modello più semplice $y(t) = \theta_1 + v(t)$.

4. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false: (Punteggio: risposta esatta =1, errore=-1, non risponde =0)

V F

(a) Se $\lim_{N\to\infty} E[(\hat{\theta}-\theta^o)^2]=0$, allora $\hat{\theta}$ è consistente.

□ □

(b) Per $k \to \infty$, media e mediana della V.C. Erlang-k tendono a coincidere.

□ □

(c) Date due V.C. X, Y, congiuntamente gaussiane, risulta $Var[X|Y=y]=Var[X]$ se e solo se $r_{XY}=0$.

□ □

(d) Date delle V.C. i.i.d. gaussiane standard X_i, $i=1,\dots,N$, $E[M_2]=N-1$.

□ □

(e) Dati due stimatori $\hat{\theta}_1$, $\hat{\theta}_2$, si supponga che $Var[\hat{\theta}_1]=Var[\hat{\theta}_2]$, $E[\hat{\theta}_1]=0$. Allora, $\hat{\theta}_1$ è preferibile a $\hat{\theta}_2$.

□ □

(f) Date delle V.C. i.i.d. gaussiane standard X_i, $i=1,\dots,N$, allora M_k è gaussiano.

□ □

(g) Date delle V.C. i.i.d. gaussiane X_i, $i=1,\dots,100$, $Var[X_i]=20$, è possibile che l'intervallo di confidenza al 95% per la media sia $[0.08, 7.92]$.

□ □

(h) Si consideri il modello $y_k = sin(t_k)\theta_1 + cos(t_k)\theta_2 + v_k, k=1,\dots,N, N\geq 2$, $t_j \neq t_k, \forall j \neq k$. Tale modello soddisfa sempre la condizione di identificabilitá.

□ □

(i) Sotto l'ipotesi $I2$ non esiste alcuno stimatore $\hat{\theta}$ tale che $Var[\hat{\theta}] < Var[\theta^M]$.

□ □

(j) $\lim_{N\to\infty} FPE = \ln AIC$.

□ □