Identificazione dei Modelli e Analisi dei Dati (I prova in it.) 23/4/2004

1. Si consideri una V.C. X e due eventi disgiunti A e B tali che A+B = $\mathcal{S}$.

1.a Dire motivando la risposta se è vero che

$$E[X] = E[X \mid A]\, P(A) + E[X \mid B]\, P(B)$$

Utilizzando il teorema della probabilità totale per V.C. condizionate da eventi:

$$\mathbf{E[X]} = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_X(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, [\, f_{X|A}(x \mid A)\, P(A) + f_{X|B}(x \mid B)\, P(B)\,]\, dx =$$

$$= P(A) \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_{X|A}(x \mid A)\, dx + P(B) \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_{X|B}(x \mid B)\, dx =$$

$$= E[X \mid A]\, P(A) + E[X \mid B]\, P(B)$$

1.b Dire motivando la risposta se è vero che

$$\mathrm{Var}[X] = \mathrm{Var}[X \mid A]\, P(A) + \mathrm{Var}[X \mid B]\, P(B)$$

Ricordiamo che

$$\mathrm{Var}[X] = E[X^2] - E[X]^2,\ \mathrm{Var}[X \mid A] = E[X^2 \mid A] - E[X \mid A]^2$$

In modo analogo al punto precedente si dimostra che

$$E[X^2] = E[X^2 \mid A]\, P(A) + E[X^2 \mid B]\, P(B)$$

Tuttavia,

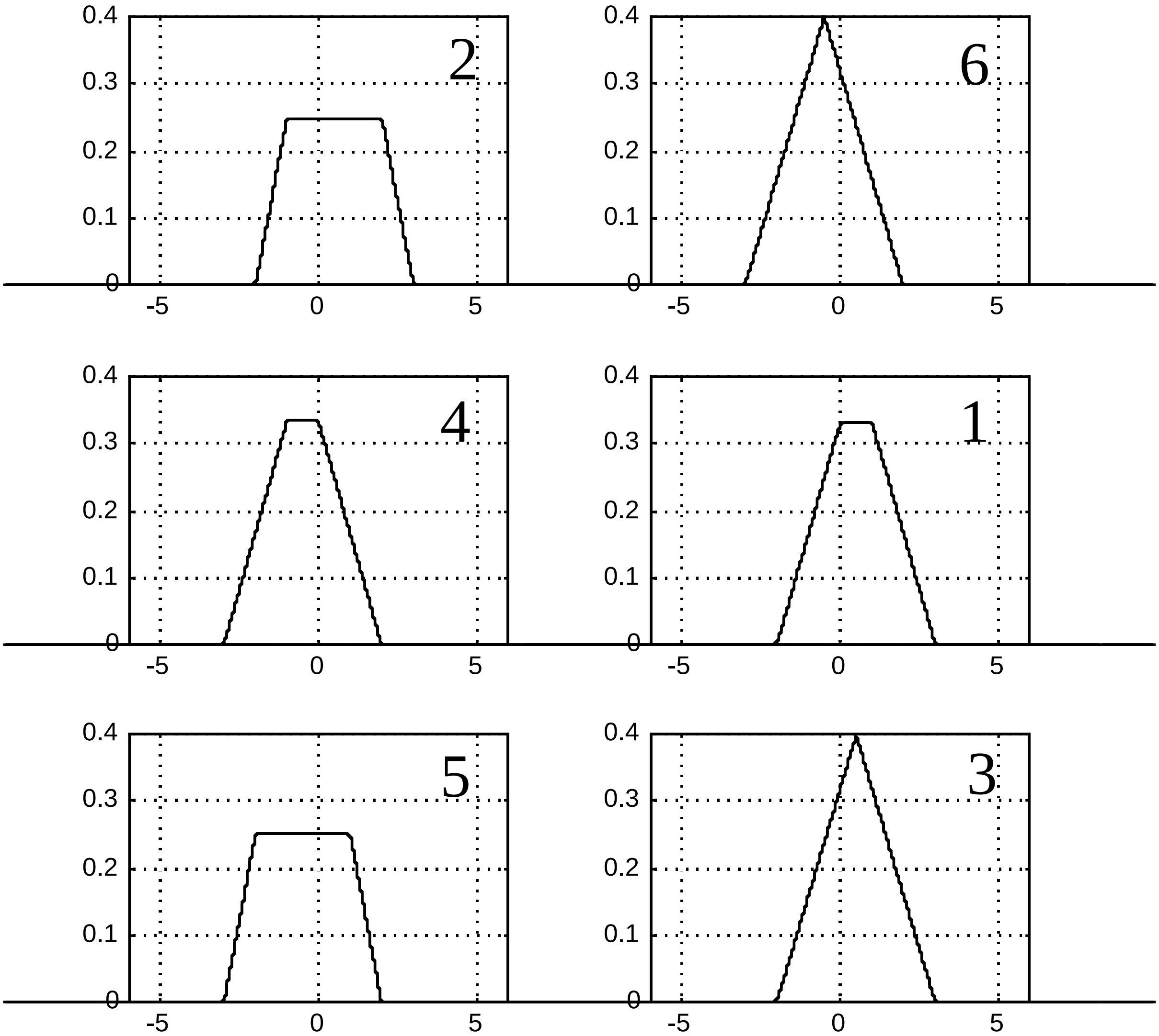
$$E[X]^2 = (E[X \mid A]\, P(A) + E[X \mid B]\, P(B))^2 \neq E[X \mid A]^2\, P(A) + E[X \mid B]^2\, P(B)$$

cosicché l'affermazione risulta falsa.

2. Date due V.C. X e Y indipendenti ed entrambe distribuite in modo uniforme in [0,1], si considerino le seguenti definizioni di W:

1. $W= 3X+2Y - 2$
2. $W= X+4Y - 2$
3. $W=2.5X+2.5Y - 2$
4. $W= - 3X - 2Y + 2$
5. $W= - X - 4Y + 2$
6. $W = - 2.5X - 2.5Y + 2$

Scrivere sopra i grafici delle ddp il numero della scelta corretta



3. Si considerino due V.C. X, Y, aventi la seguente ddp congiunta

$f_{XY}(x,y) = (1+y)/4,\quad |x| \leq 2,\quad -1 \leq y \leq 0$
$f_{XY}(x,y) = (1-y)/4,\quad |x| \leq 2,\quad 0 \leq y \leq 1$
$f_{XY}(x,y) = 0,\quad$ altrove

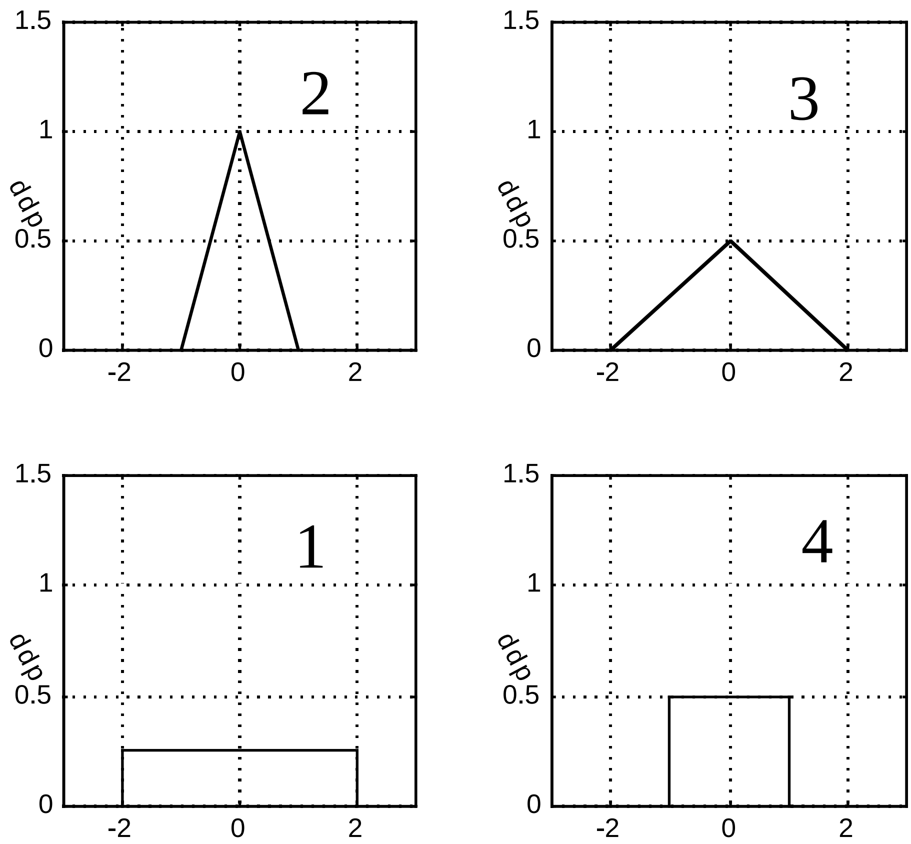
(Si noti che la ddp NON è uniforme)
Si definiscano inoltre

$V = 2Y$
$W = X/2$

Scrivere sopra le figure delle densità di probabilità il numero della corrispondente densità.

1) $f_X(x)$ 2) $f_{Y|X}(y|X=0)$

3) $f_V(v)$ 4) $f_W(w)$



4. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false:
(Punteggio: risposta esatta = 1, errore = -1, non risponde = 0)

	V	*F*
1. Se $P(A \mid B) = P(B)$ allora A e B sono indipendenti.	❑	■
2. Dati degli eventi di Poisson, il numero di eventi che si verificano in un certo intervallo è una V.C. la cui media coincide con la varianza.	■	❑
3. Se $Y = 2X + b$, allora $f_Y(y) = f_X((y-b)/2)$.	❑	■
4. La diseguaglianza di Cebicev afferma che $P(\lvert X \rvert > \varepsilon) \geq \sigma_X^2/\varepsilon$.	❑	■
5. Siano X ed Y le coordinate di un punto scelto in modo equiprobabile in un poligono regolare con centro nell'origine. Allora X e Y sono indipendenti.	❑	■
6. La probabilità di ottenere esattamente un successo su n prove di Bernoulli è pari ad np.	❑	■
7. Se X e Y sono V.C. uniformi e indipendenti la ddp congiunta $f_{XY}(x,y)$ è uniforme in un rettangolo.	■	❑
8. Date due V.C. X e Y la ddp di $Z = X+Y$ è la convoluzione della ddp di X e di Y.	❑	■
9. La somma di due V.C. di tipo Erlang con il medesimo parametro λ, è ancora una V.C. di tipo Erlang di ordine pari alla somma degli ordini delle due Erlang da sommare.	■	❑
10. Se $P(A+B) = P(A) + P(B)$, allora $P(AB) = 0$ ma non è detto che A e B siano disgiunti.	■	❑