Identificazione dei Modelli e Analisi dei Dati

Prof. G. De Nicolao

27 Giugno 2008

Cognome .... **Nome** ....

Matricola .... **Firma** ....

- Compilare a penna questo foglio all'inizio della prova.
- Durante lo svolgimento della prova, non è consentito l'uso di materiale diverso dai comuni strumenti di calcolo, scrittura e disegno.
- Le risposte devono essere scritte in modo chiaramente leggibile nello spazio immediatamente seguente ogni domanda (se necessario, a seguito di cancellature, passare sul retro).
- Le uniche risposte valide sono quelle riportate nel presente fascicolo, che va consegnato, senza fogli addizionali, al termine della prova.

1.
2.
3.
4.
5.

1. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false: (Punteggio: risposta esatta =1, errore=-1, non risponde =0)

V F

(a) Lanciando 4 dadi la probabilità di ottenere almeno due 6 è maggiore del 12%.

☐ ☐

(b) Il mazzo A ha due Jolly ed il mazzo B nessuno. Scelto un mazzo in modo equiprobabile, estraggo una carta a caso. Se la carta non è un Jolly, la probabilità di avere scelto il mazzo A è 52/106.

☐ ☐

(c) Il valore quadratico medio di una V.C. non è mai inferiore alla sua varianza.

☐ ☐

(d) Per una V.C. di Bernoulli la media non può essere superiore alla varianza.

☐ ☐

(e) La varianza di una V.C uniforme in $[-1, 1]$ è superiore alla varianza di una V.C. con ddp a triangolo in $[-1, 1]$ con vertice nell'origine.

☐ ☐

2. Si consideri una V.C X esponenziale con $E[X] = 1/\lambda$. Determinare la ddp di $Y = X^2$.

3. Si considerino i seguenti dati

$$\begin{array}{llll} y(1) = 0 & y(2) = 4 & y(3) = 4 & y(4) = 4 \\ x(1) = -3 & x(2) = 0 & x(3) = 1 & x(4) = 2 \end{array}$$

Si ipotizza che i dati siano generati dal seguente modello

$$y(t) = \theta_1 + \theta_2 x(t) + v(t), \quad t = 1, \dots, 4$$

dove $v(t)$ sono errori di misura i.i.d. $v(t) \sim N(0, \sigma^2)$.

(a) Calcolare la stima di Gauss-Markov di θ.

(b) Calcolare la stima di σ^2.

(c) Calcolare la stima di $Var[\theta^M]$.

(d) Calcolare l'intervallo di confidenza al 95% per θ_2.

4. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false: (Punteggio: risposta esatta =1, errore=-1, non risponde =0)

V F

(a) A parità di MSE, uno stimatore polarizzato ha varianza minore di uno stimatore non polarizzato.

□ □

(b) Dato un vettore casuale X, con $X_i, i = 1, \ldots, n$, i.i.d., gaussiane standard, allora $X'X$ è una V.C. χ^2 a n gradi di libertá.

□ □

(c) Date delle V.C. i.i.d. X_i, $i = 1, \ldots, n$, i momenti campionari sono stimatori non polarizzati ed asintoticamente gaussiani.

□ □

(d) Date delle V.C. i.i.d. X_i, $i = 1, \ldots, n$, allora S^2 è gaussiana.

□ □

(e) Dati due stimatori $\hat{\theta}_1$, $\hat{\theta}_2$, si supponga che $Var[\hat{\theta}_1] = 3, Var[\hat{\theta}_2] = 1$, $E[\hat{\theta}_1] - \theta^0 = 1, E[\hat{\theta}_2] - \theta^0 = 2$. Allora, $\hat{\theta}_2$ è preferibile a $\hat{\theta}_1$.

□ □

(f) Date delle V.C. i.i.d. X_i, $i = 1, \ldots, n$, allora M_1 è gaussiano solo se le X_i sono gaussiane.

□ □

(g) Date delle V.C. i.i.d. gaussiane X_i, $i = 1, \ldots, 100$, $Var[X_i]$ nota, l'ampiezza dell'intervallo di confidenza al 95% per la media non dipende dai dati X_i.

□ □

(h) Sotto l'ipotesi I2, la matrice varianza delle stime dei parametri è sempre diagonale.

□ □

(i) Sotto l'ipotesi $I2$ può esistere uno stimatore lineare $\hat{\theta}$ tale che $Var[\hat{\theta}] < Var[\theta^M]$.

□ □

(j) Per lo stimatore BLUE con $\Psi = I$, risulta $FPE = \frac{n}{n-q} SSR$ dove n è il numero dei dati e q è il numero dei parametri.

□ □

5. Il seguente codice MatLab implementa la stima BLUE di un modello parabolico che deve approssimare dei punti le cui coordinate sono fornite nei vettori colonna x e y. Si ipotizza $\Psi = I$. Evidenziare e correggere eventuali errori.

```
n = length(y);

Phi = [ones(n) x x.^2];

thetaBLUE = y/Phi;

epsilon = x - Phi * thetaBLUE;

SSR = epsilon'*epsilon;

sigma2hat=SSR/(n-2);

Vartheta=sigma2hat*inv(Phi'*Phi);
```

Appendix Table 5 Quantiles of the d.f. of t

(Reproduced from Sir Ronald Fisher and Dr F. Yates: *Statistical Tables for Biological, Medical and Agricultural Research*, Oliver and Boyd Ltd., Edinburgh, by kind permission of the authors and publishers)

$P=2(1-F)$	0·9	0·8	0·7	0·6	0·5	0·4	0·3	0·2	0·1	0·05	0·02	0·01	0·001
$\nu=$ 1	0·158	0·325	0·510	0·727	1·000	1·376	1·963	3·078	6·314	12·706	31·821	63·657	636·619
2	0·142	0·289	0·445	0·617	0·816	1·061	1·386	1·886	2·920	4·303	6·965	9·925	31·598
3	0·137	0·277	0·424	0·584	0·765	0·978	1·250	1·638	2·353	3·182	4·541	5·841	12·924
4	0·134	0·271	0·414	0·569	0·741	0·941	1·190	1·533	2·132	2·776	3·747	4·604	8·610
5	0·132	0·267	0·408	0·559	0·727	0·920	1·156	1·476	2·015	2·571	3·365	4·032	6·869
6	0·131	0·265	0·404	0·553	0·718	0·906	1·134	1·440	1·943	2·447	3·143	3·707	5·959
7	0·130	0·263	0·402	0·549	0·711	0·896	1·119	1·415	1·895	2·365	2·998	3·499	5·408
8	0·130	0·262	0·399	0·546	0·706	0·889	1·108	1·397	1·860	2·306	2·896	3·355	5·041
9	0·129	0·261	0·398	0·543	0·703	0·883	1·100	1·383	1·833	2·262	2·821	3·250	4·781
10	0·129	0·260	0·397	0·542	0·700	0·879	1·093	1·372	1·812	2·228	2·764	3·169	4·587
11	0·129	0·260	0·396	0·540	0·697	0·876	1·088	1·363	1·796	2·201	2·718	3·106	4·437
12	0·128	0·259	0·395	0·539	0·695	0·873	1·083	1·356	1·782	2·179	2·681	3·055	4·318
13	0·128	0·259	0·394	0·538	0·694	0·870	1·079	1·350	1·771	2·160	2·650	3·012	4·221
14	0·128	0·258	0·393	0·537	0·692	0·868	1·076	1·345	1·761	2·145	2·624	2·977	4·140
15	0·128	0·258	0·393	0·536	0·691	0·866	1·074	1·341	1·753	2·131	2·602	2·947	4·073
16	0·128	0·258	0·392	0·535	0·690	0·865	1·071	1·337	1·746	2·120	2·583	2·921	4·015
17	0·128	0·257	0·392	0·534	0·689	0·863	1·069	1·333	1·740	2·110	2·567	2·898	3·965
18	0·127	0·257	0·392	0·534	0·688	0·862	1·067	1·330	1·734	2·101	2·552	2·878	3·922
19	0·127	0·257	0·391	0·533	0·688	0·861	1·066	1·328	1·729	2·093	2·539	2·861	3·883
20	0·127	0·257	0·391	0·533	0·687	0·860	1·064	1·325	1·725	2·086	2·528	2·845	3·850
21	0·127	0·257	0·391	0·532	0·686	0·859	1·063	1·323	1·721	2·080	2·518	2·831	3·819
22	0·127	0·256	0·390	0·532	0·686	0·858	1·061	1·321	1·717	2·074	2·508	2·819	3·792
23	0·127	0·256	0·390	0·532	0·685	0·858	1·060	1·319	1·714	2·069	2·500	2·807	3·767
24	0·127	0·256	0·390	0·531	0·685	0·857	1·059	1·318	1·711	2·064	2·492	2·797	3·745
25	0·127	0·256	0·390	0·531	0·684	0·856	1·058	1·316	1·708	2·060	2·485	2·787	3·725
26	0·127	0·256	0·390	0·531	0·684	0·856	1·058	1·315	1·706	2·056	2·479	2·779	3·707
27	0·127	0·256	0·389	0·531	0·684	0·855	1·057	1·314	1·703	2·052	2·473	2·771	3·690
28	0·127	0·256	0·389	0·530	0·683	0·855	1·056	1·313	1·701	2·048	2·467	2·763	3·674
29	0·127	0·256	0·389	0·530	0·683	0·854	1·055	1·311	1·699	2·045	2·462	2·756	3·659
30	0·127	0·256	0·389	0·530	0·683	0·854	1·055	1·310	1·697	2·042	2·457	2·750	3·646
40	0·126	0·255	0·388	0·529	0·681	0·851	1·050	1·303	1·684	2·021	2·423	2·704	3·551
60	0·126	0·254	0·387	0·527	0·679	0·848	1·046	1·296	1·671	2·000	2·390	2·660	3·460
120	0·126	0·254	0·386	0·526	0·677	0·845	1·041	1·289	1·658	1·980	2·358	2·617	3·373
∞	0·126	0·253	0·385	0·524	0·674	0·842	1·036	1·282	1·645	1·960	2·326	2·576	3·291