Identificazione dei Modelli e Analisi dei Dati

Prof. G. De Nicolao

II prova in itinere - 28 Gennaio 2013

Cognome .... **Nome** ....

Matricola .... **Firma** ....

- Compilare a penna questo foglio all'inizio della prova.
- Durante lo svolgimento della prova, non è consentito l'uso di materiale diverso dai comuni strumenti di calcolo, scrittura e disegno.
- Le risposte devono essere scritte in modo chiaramente leggibile nello spazio immediatamente seguente ogni domanda (se necessario, a seguito di cancellature, passare sul retro).
- Le uniche risposte valide sono quelle riportate nel presente fascicolo, che va consegnato, senza fogli addizionali, al termine della prova.

1.	
2.	
3.	
4.	

1. Si supponga che valga l'Ipotesi I2, vale a dire

$$Y = \Phi\theta^o + V, \qquad V \sim N(0, \sigma^2\Psi)$$

(a) Scrivere l'espressione dello stimatore di Gauss-Markov θ^M.

(b) Dimostrare, riportando i passaggi, che θ^M è non polarizzato.

(c) Ricavare, riportando i passaggi, l'espressione di $Var[\theta^M]$.

2. Si consideri uno stimatore gaussiano $\hat{\theta} \sim (\theta_0, \sigma^2_{\hat{\theta}})$, calcolato a partire da n dati sperimentali. Si indichi con A l'ampiezza dellintervallo di confidenza al 95% per il parametro (si intende $A =$ estremo superiore - estremo inferiore). Si considerino le seguenti alternative per i valori di A:

   1. $A = 188.16$,

   2. $A = 3.92$,

   3. $A = 94.08$,

   4. $A = 47.04$,

   5. $A = 7.84$,

   6. $A = 23.52$,

   Scrivere in corrispondenza dei seguenti valori di n e $\sigma_{\hat{\theta}}$, il numero del caso corretto.

   $n = 9, \quad \sigma_{\hat{\theta}} = 6$

   $n = 4, \quad \sigma_{\hat{\theta}} = 2$

   $n = 9, \quad \sigma_{\hat{\theta}} = 1$

   $n = 4, \quad \sigma_{\hat{\theta}} = 48$

   $n = 4, \quad \sigma_{\hat{\theta}} = 24$

   $n = 4, \quad \sigma_{\hat{\theta}} = 12$

3. Si considerino i seguenti dati

$$\begin{array}{llll} y(1) = 3 & y(2) = 2 & y(3) = 2 & y(4) = 1 \\ x(1) = -3 & x(2) = 0 & x(3) = 1 & x(4) = 2 \end{array}$$

Si ipotizza che i dati siano generati dal seguente modello

$$y(t) = \theta_1 + \theta_2 x(t) + v(t), \quad t = 1, \ldots, 4$$

dove $v(t)$ sono errori di misura i.i.d. $v(t) \sim N(0, \sigma^2)$.

(a) Calcolare la stima di Gauss-Markov di θ.

(b) Calcolare la stima di σ^2.

(c) Calcolare la stima di $Var[\theta^M]$.

(d) Calcolare l'intervallo di confidenza al 95% per θ_2.

4. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false: (Punteggio: risposta esatta =1, errore=-1, non risponde =0)

$V \quad F$

(a) Uno stimatore non polarizzato può avere varianza maggiore di uno stimatore polarizzato.

□ □

(b) Dato un vettore casuale X, con $X_i, i = 1, \dots, n$, i.i.d., gaussiane standard, allora $E[X'X] = n - 1$.

□ □

(c) La funzione di distribuzione di uno stimatore consistente converge ad una funzione a scalino.

□ □

(d) Se considero stimatori non polarizzati, lo stimatore a minima varianza minimizza anche l'errore quadratico medio.

□ □

(e) Dati due stimatori $\hat{\theta}_1$, $\hat{\theta}_2$, si supponga che $Var[\hat{\theta}_1] = 1, Var[\hat{\theta}_2] = 2$, $E[\hat{\theta}_1] - \theta^0 = 2, E[\hat{\theta}_2] - \theta^0 = 1$. Allora, $\hat{\theta}_1$ è preferibile a $\hat{\theta}_2$.

□ □

(f) Date delle V.C. i.i.d. X_i, $i = 1, \dots, N$, allora M_1 è asintoticamente gaussiano.

□ □

(g) Date delle V.C. i.i.d. gaussiane X_i, $i = 1, \dots, 100$, $Var[X_i]$ nota, l'ampiezza dell'intervallo di confidenza al 95% per la media non dipende dai dati X_i.

□ □

(h) La non polarizzazione asintotica è condizione necessaria per la consistenza di uno stimatore.

□ □

(i) Sotto l'ipotesi $I2$ non esiste alcuno stimatore lineare non polarizzato $\hat{\theta}$ tale che $Var[\hat{\theta}] < Var[\theta^M]$.

□ □

(j) Per lo stimatore BLUE con $\Psi = I$, risulta $FPE = (n + q)SSR$ dove n è il numero dei dati e q è il numero dei parametri.

□ □