

# Identificazione dei Modelli e Analisi dei Dati A

Prof. G. De Nicolao

30 Gennaio 2019

**Cognome** ..... **Nome**.....  
**Matricola** ..... **Firma**.....

- Compilare a penna questo foglio all'inizio della prova.
- Durante lo svolgimento della prova, non è consentito l'uso di materiale diverso dai comuni strumenti di calcolo, scrittura e disegno.
- Le risposte devono essere scritte in modo chiaramente leggibile nello spazio immediatamente seguente ogni domanda (se necessario, a seguito di cancellature, passare sul retro).
- Le uniche risposte valide sono quelle riportate nel presente fascicolo, che va consegnato, senza fogli addizionali, al termine della prova.

1
2.
3.
4.

1. (a) Dati due eventi  $A$  e  $B$ , dare la definizione di probabilità condizionata  $P(A|B)$ .

(b) Enunciare il Teorema della probabilità totale.

(c) Enunciare il Teorema di Bayes.

(d) Dimostrare il Teorema di Bayes.

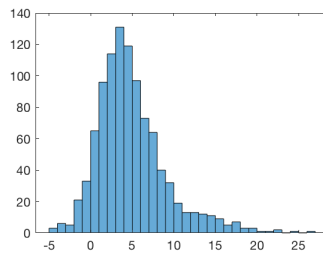
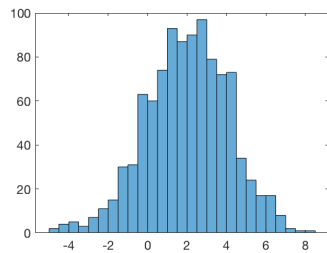
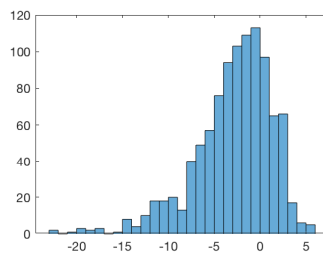
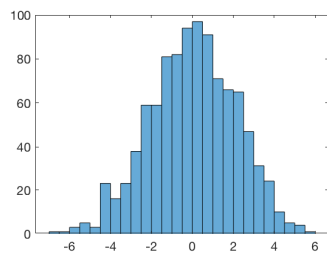
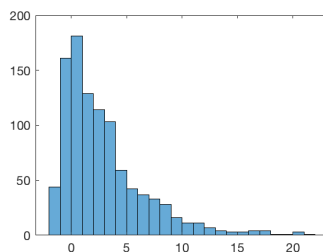
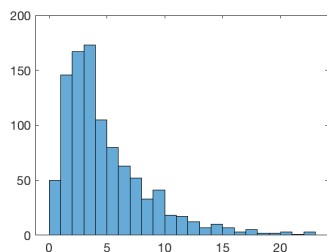
2. Siano  $U$ ,  $X$ , e  $Z$  tre V.C. indipendenti con le seguenti distribuzioni:

- (a)  $U$  uniforme in  $[0, 1]$ ;
- (b)  $X$  esponenziale con  $E[X] = 4$ ;
- (c)  $Z \sim N(1, 2)$ .

Si considerino le seguenti alternative per la definizione di  $Y$ :

- 1.  $Y = Z + U$
- 2.  $Y = Z - U$
- 3.  $Y = X + U$
- 4.  $Y = X - U$
- 5.  $Y = Z + X$
- 6.  $Y = Z - X$

Scrivere sopra i grafici degli istogrammi di  $Y$  il numero della scelta corretta.



3. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false: (Punteggio: risposta esatta =1, errore=-1, non risponde =0)

V F

(a) La probabilità dell'unione di due eventi disgiunti è sempre uguale alla somma delle loro probabilità.

(b) Si lancino un dado rosso ed un dado verde. Sapendo che la somma è pari a 4, la probabilità che il dado rosso sia uguale ad 1 è pari a  $1/3$ .

(c) Si consideri una moneta onesta. Dopo aver ottenuto 9 croci di seguito, la probabilità di ottenere testa è maggiore di 0.5.

(d) Per una V.C. di Bernoulli  $X$ , risulta  $E[X^2] = E[X]^2$ .

(e) Sia  $Y = g(X)$  dove  $g(\cdot)$  è monotona crescente. Si indichino con  $x_m$  e  $y_m$  le mediane di  $X$  e  $Y$ . Allora,  $y_m = g(x_m)$ .

(f) Sia  $X = aV$ ,  $Y = bW$ . Allora,  $r_{XY} = r_{VW}$  se e solo se  $a = b = 1$ .

(g) La convergenza quasi certa implica la convergenza in media quadratica e quella in probabilità.

(h) Per V.C. i.i.d.  $X_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , gaussiane, la media campionaria è una  $t_{n-1}$ .

(i) Si consideri lo stimatore di Gauss-Markov, con  $Var[V] = \sigma^2\Psi$ . Allora,  $Var[\theta^M]$  non dipende da  $\sigma^2$ .

(j) La condizione di identificabilità è soddisfatta se e solo se  $\det(\Phi'\Phi) \neq 0$ .

4. Si considerino i seguenti dati

$$\begin{array}{lll} x_1 = -1 & x_2 = 1 & x_3 = 2 \\ y_1 = 2 & y_2 = 1.5 & y_3 = 5 \end{array}$$

e i modelli

$$(1) \quad Y_k = f_1(x_k) = \theta x_k + V_k, \text{Var}[V] = \sigma^2 I$$

$$(2) \quad Y_k = f_2(x_k) = \theta x_k^2 + V_k, \text{Var}[V] = \sigma^2 I$$

(a) Stimare  $\theta$  e  $\text{Var}[\theta]$  per il primo modello.

(b) Stimare  $\theta$  e  $\text{Var}[\theta]$  per il secondo modello.

(c) Disegnare le stime di  $f_1(x)$  e  $f_2(x)$ .

(d) Dire, motivando la risposta, se i due modelli sono gerarchici.

(e) Dire, motivando la risposta, quale modello è preferibile.