Esercizi

1. Si considerino le seguenti V.C. indipendenti

$$Y_1 \sim N(m, 1) \qquad\qquad Y_2 \sim N(m, 2)$$

Si definisca $\theta^0 := m$ e si considerino i seguenti stimatori

$$\hat{\theta}_1 = \frac{Y_1 + Y_2}{2} \qquad\qquad \hat{\theta}_2 = \frac{Y_1 + Y_2}{3}$$

   (a) Calcolare media e varianza di $\hat{\theta}_1$ e di $\hat{\theta}_2$

   (b) Per $m = 4$, dire, motivando la risposta, quale stimatore è migliore.

2. A partire dai dati X_i, $i = 1, ..., N$, i.i.d., $X_i \sim N(m, \sigma^2)$, è stata calcolata la media campionaria. Si considerino i seguenti casi in cui σ^2 è nota:

   1. $N = 16,\ \sigma^2 = 1$ 2. $N = 25,\ \sigma^2 = 4$ 3. $N = 25,\ \sigma^2 = 9$

   Si considerino, inoltre, altri tre casi in cui σ^2 è ignota ed è stata calcolata la varianza campionaria S^2:

   4. $N = 16,\ S_c^2 = 1$ 5. $N = 25,\ S_c^2 = 4$ 6. $N = 25,\ S_c^2 = 9$

   Si indichi con $A := L - U$ l'ampiezza dell'intervallo di confidenza al 95%, dove L e U sono, rispettivamente, il limite inferiore e superiore, vale a dire $I_{0.95} = [L, U]$. Calcolare A in tutti i casi.

3. A partire dai dati X_i, $i = 1, ..., n$, i.i.d., è stata calcolata la stima $\hat{\theta}$ del parametro θ. Lo stimatore è non polarizzato e gaussiano: $\hat{\theta} \sim N(\theta, \sigma_{\hat{\theta}}^2)$. Si considerino i seguenti casi:

   1. $N = 9,\ \sigma_{\hat{\theta}}^2 = 1$ 2. $N = 16,\ \sigma_{\hat{\theta}}^2 = 4$ 3. $N = 25,\ \sigma_{\hat{\theta}}^2 = 9$

   4. $N = 9,\ \sigma_{\hat{\theta}}^2 = 16$ 5. $N = 16,\ \sigma_{\hat{\theta}}^2 = 25$ 6. $N = 25,\ \sigma_{\hat{\theta}}^2 = 36$

   Calcolare, per tutti i casi, gli intervalli di confidenza al 95%.

4. Si consideri l'intervallo di confidenza della media campionaria dei dati X_i, $i = 1, ..., n$, i.i.d., $X_i \sim N(m, \sigma^2)$. Si indichi con A l'ampiezza dell'intervallo. Si considerino i seguenti casi:

   1. $A = 2,\ \sigma^2 = 1$ 2. $A = 1,\ \sigma^2 = 4$ 3. $A = 2,\ \sigma^2 = 9$

   4. $A = 1,\ \sigma^2 = 16$ 5. $A = 2,\ \sigma^2 = 25$ 6. $A = 1,\ \sigma^2 = 36$

   Calcolare, per tutti i casi, il valore di n.

5. Si consideri uno stimatore gaussiano $\hat{\theta} \sim N(\theta_0, \sigma_{\hat{\theta}}^2)$, calcolato a partire da n dati sperimentali. Si indichi con A l'ampiezza dell'intervallo di confidenza al 95% per il parametro. Si considerino le seguenti alternative per i valori di A:

   1. $A = 188.16$ 2. $A = 3.92$ 3. $A = 94.08$

   4. $A = 47.04$ 5. $A = 7.84$ 6. $A = 23.52$

   Calcolare, per tutti i casi, i valori di n e $\sigma_{\hat{\theta}}$.

6. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.

   (a) Se considero stimatori non polarizzati, lo stimatore a minima varianza minimizza anche l'errore quadratico medio.

   (b) Dati due stimatori $\hat{\theta}_1$, $\hat{\theta}_2$, si supponga che $Var(\hat{\theta}_1) = 1$, $Var(\hat{\theta}_2) = 2$, $E(\hat{\theta}_1) - \theta^0 = 1.5$, $E(\hat{\theta}_2) - \theta_0 = 1$. Allora, $\hat{\theta}_1$ è preferibile a $\hat{\theta}_2$.

   (c) Date delle V.C. i.i.d. gaussiane X_i, $i = 1, ..., N$, allora M_1 è gaussiano.

   (d) Date delle V.C. i.i.d. gaussiane X_i, $i = 1, ..., 100$, $Var(X_i)$ incognita, l'ampiezza dell'intervallo di confidenza al 95% per la media non dipende dai dati X_i.

   (e) Siano date le osservazioni i.i.d. X_i, $i = 1, ..., n$. Allora, $Var(M_1) = E(S^2)/n$.

   (f) I momenti campionari centrali sono stimatori non polarizzati.

   (g) L'ampiezza dell'intervallo di confidenza per la media campionaria di osservazioni i.i.d. gaussiane è inversamente proporzionale al numero n di osservazioni.

   (h) Relativamente alla stima della media di osservazioni i.i.d. gaussiane, la quantità di informazione di Fisher è pari a σ^2/n.

   (i) Se $X_i \sim N(0, 1)$, $i = 1, ..., n$, sono V.C. indipendenti, allora M_2 è distribuito come un χ^2_n.

   (j) Date delle V.C. i.i.d. X_i, $i = 1, ..., n$, il momento campionario del terzo ordine M_3 è non polarizzato, consistente e asintoticamente gaussiano.

   (k) Sia MSE l'errore quadratico medio associato ad uno stimatore polarizzato $\hat{\theta}$. Si consideri un secondo stimatore $\hat{\theta}^{new}$ non polarizzato e tale che $Var(\hat{\theta}^{new}) = Var(\hat{\theta})$. Allora, $MSE^{new} = MSE - [E(\hat{\theta}) - \theta^0]^2$.

   (l) Se X_i, $i = 1, ..., n$, sono V.C. identicamente distribuite, ma non indipendenti, allora $Var(M_1) > \sigma^2/n$.

   (m) Per gli stimatori non polarizzati la varianza coincide con l'MSE.

   (n) La media della varianza campionaria è uguale alla varianza della media campionaria.

   (o) Date delle V.C. i.i.d. X_i, $i = 1, ..., n$, allora S_2 è asintoticamente gaussiana solo se le X_i sono gaussiane.

   (p) A parità di MSE, uno stimatore polarizzato ha varianza minore di uno stimatore non polarizzato.

   (q) Date delle V.C. i.i.d. X_i, $i = 1, ..., n$, allora S^2 è gaussiana.

   (r) Date delle V.C. i.i.d. gaussiane X_i, $i = 1, ..., 100$, $Var(X_i)$ nota, l'ampiezza dell'intervallo di confidenza al 95% per la media non dipende dai dati X_i.