Identificazione dei Modelli (MN) 2/5/2002
I prova in itinere

1.a Dati due eventi A ed M con $P(M) \neq 0$, dare la definizione di probabilità condizionata $P(A|M)$.

1.b Enunciare il teorema della probabilità totale

1.c Enunciare il teorema di Bayes

1.d Dimostrare il teorema di Bayes

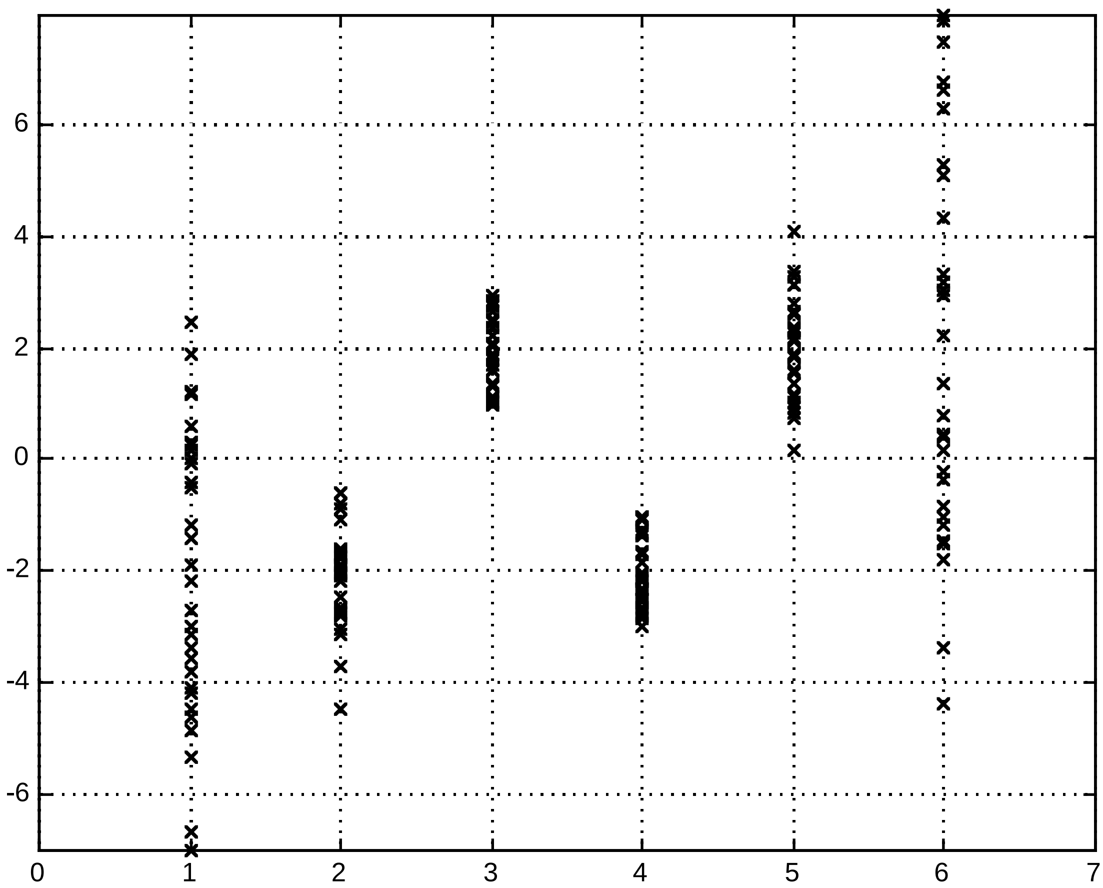
2. Siano date le seguenti variabili casuali

a) Normale: m=2, σ^2=1 b) Normale: m=2, σ^2=3

c) Normale: m=-2, σ^2=1 d) Normale: m=-2, σ^2=3

e) Uniforme in [-3,-1] f) Uniforme in [1,3]

Da ciascuna V.C. sono stati estratti 30 campioni indipendenti riportati nella figura seguente (ogni colonna di punti corrisponde ad una diversa V.C). Indicare sotto ogni colonna la lettera della V.C. corrispondente.

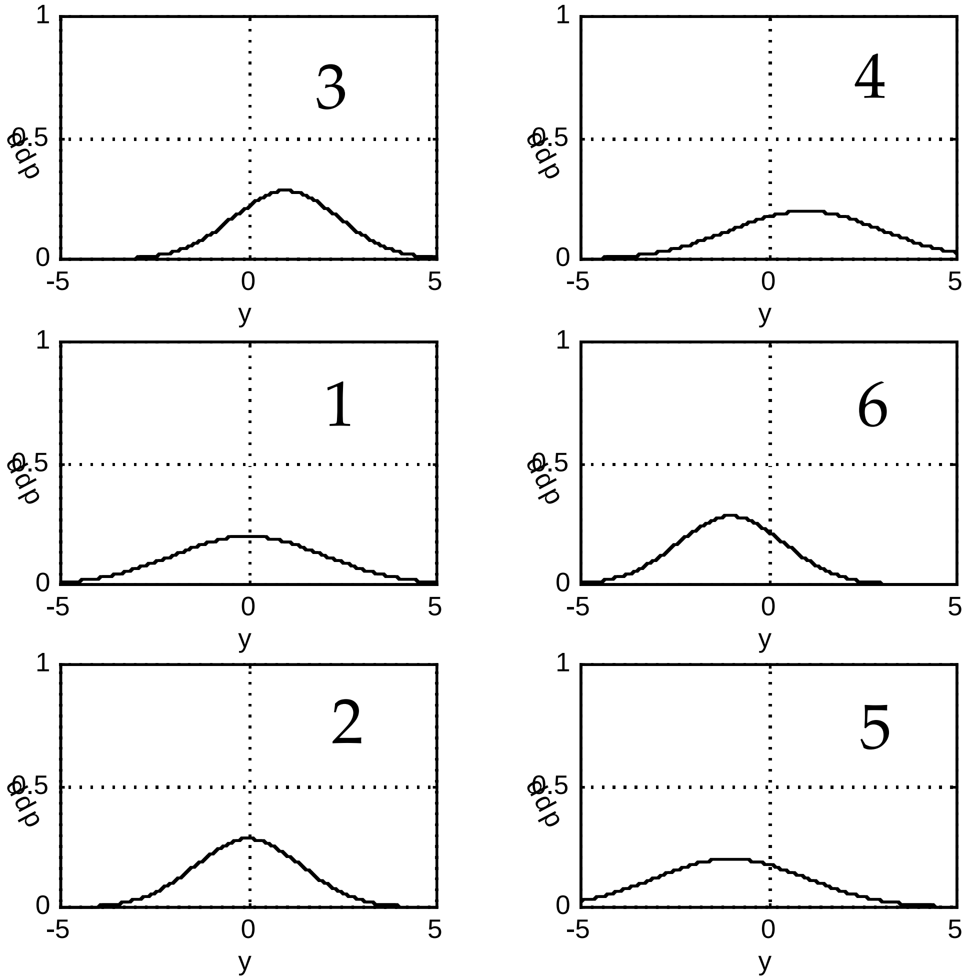


d c f e a b

3. Sia $Y = \alpha X + \beta Z + \gamma$, dove $X \sim N(0,1)$, $Z \sim N(0,1)$ sono V.C. indipendenti. Si considerino le seguenti scelte per i parametri α, β, γ:

1) $\alpha = 2$,	$\beta = 0$,	$\gamma = 0$	2) $\alpha = 1$,	$\beta = -1$,	$\gamma = 0$
3) $\alpha = 1$,	$\beta = -1$,	$\gamma = 1$	4) $\alpha = 0$,	$\beta = 2$,	$\gamma = 1$
5) $\alpha = -2$,	$\beta = 0$,	$\gamma = -1$	6) $\alpha = 1$,	$\beta = 1$,	$\gamma = -1$

Riportare sopra i seguenti grafici della densità di probabilità di Y il numero della corrispondente coppia α,β



4. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false:
(Punteggio: risposta esatta = 1, errore = -1, non risponde = 0)

V *F*

- Se, data una V.C. X con E[X] = 1, Var[X] = 2, si definisce Y = X(1+X). risulta E[Y] = 4.

  ■ ❑

- Se X è una V.C. normale, allora $Y = e^X$ è lognormale.

  ■ ❑

- Se E[X] > 0 ed E[Y] > 0, allora $r_{XY} \geq 0$.

  ❑ ■

- Se $r_{XY} = 1$, allora Var[X+Y] = 2Var[X].

  ❑ ■

- Un sacchetto contiene una moneta onesta ed una moneta truccata con P(Testa) = 0.7. Si sceglie ad occhi chiusi una moneta e la si lancia. Sapendo che è uscita croce, la probabilità di avere scelto la moneta onesta é 5/8. *(Suggerimento: usare il teorema di Bayes …)*

  ■ ❑

- Si considerino degli eventi di Poisson con intensità λ. Se λ viene dimezzato, si quadruplica la varianza del tempo di attesa tra un evento ed il successivo.

  ■ ❑

- Sia Y = X+V, dove X e V sono V.C. indipendenti con E[X] = E[V] = 0, Var[X] = Var[V] = σ^2. Allora, $r_{XY} = 0.5$.

  ❑ ■

- Data una V.C. X uniforme in [0,1], si definisca Y=-X. Allora, Y è uniforme in [-1,0] ed inoltre W = X+Y ha una ddp “a triangolo” nell’intervallo [-1,1].

  ❑ ■

- Il minimo di $E[(X-\alpha)^2]$ si ottiene per α = E[X].

  ■ ❑

- Sia W = X+Y, dove X e Y sono due V.C. indipendenti. Allora, $F_W(w) = F_X(w)+F_Y(w)$.

  ❑ ■

Identificazione dei Modelli (MN) 26/6/2002
I parte

1. Date due V.C. V e W gaussiane standard e indipendenti tra di loro, si considerino le seguenti alternative per la definizione di X e Y:

1. X= V - W Y= W - V	2. X = V Y = V + W	3. X = V - W Y = V + W
4. X= 2V - W Y= V + 2W	5. X = 2V Y = W	6. X = V - W Y = 2V - 2W

Scrivere nei riquadri accanto alle varianze e covarianze il numero della scelta corretta

$\boxed{6}$ $\sigma_X^2 = 2, \sigma_Y^2 = 8, \ \sigma_{XY} = 4$

$\boxed{4}$ $\sigma_X^2 = 5, \sigma_Y^2 = 5, \ \sigma_{XY} = 0$

$\boxed{2}$ $\sigma_X^2 = 1, \sigma_Y^2 = 2, \ \sigma_{XY} = 1$

$\boxed{3}$ $\sigma_X^2 = 2, \sigma_Y^2 = 2, \ \sigma_{XY} = 0$

$\boxed{5}$ $\sigma_X^2 = 4, \sigma_Y^2 = 1, \ \sigma_{XY} = 0$

$\boxed{1}$ $\sigma_X^2 = 2, \sigma_Y^2 = 2, \ \sigma_{XY} = -2$

2. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false:
(Punteggio: risposta esatta = 1, errore = -1, non risponde = 0)

	V	*F*
• Se due eventi A e B sono disgiunti (AB = {0}), allora P(AB)=P(A)P(B).	☐	■
• Sapendo che la somma di due dadi è pari a 4, la probabilità che sia uscito un "doppio due" è uguale a 1/4.	☐	■
• Giocando con una coppia di dadi, la probabilità di ottenere due "doppi 6" consecutivi è inferiore a 1/1000.	■	☐
• La d.d.p. di V := αX+βY è uguale a $f_V(v) = \alpha f_X(v)+\beta f_Y(v)$.	☐	■
• Se X è una V.C. esponenziale, allora $F_X(0) = 0$.	■	☐

II Prova in itinere

1. Si considerino due V.C. X_1 e X_2, indipendenti, aventi le seguenti medie e varianze:

$E[X_1] = E[X_2] = m \qquad Var[X_1] = \sigma_1^2 > 0 \qquad Var[X_2] = \sigma_2^2 > 0.$

Per stimare il parametro incognito m, si usa lo stimatore

$\hat{m} = \alpha X_1 + \beta X_2$

dove α e β sono numeri reali da scegliere opportunamente (per esempio, se $\alpha=\beta=1/2$, lo stimatore $\hat{m}$ coincide con la media campionaria).

1.a Supponendo che α sia dato, dire, motivando la risposta, quale condizione deve soddisfare β affinché lo stimatore $\hat{m}$ sia non polarizzato.

$E[\hat{m}] = \alpha E[X_1] + \beta\, E[X_2] = (\alpha+\beta)\, m$

Affinché $(\alpha+\beta)\, m = m$, deve essere $\alpha+\beta = 1$

1.b Calcolare $Var[\hat{m}]$ in funzione di α, β, σ_1^2, σ_2^2.

$Var[\hat{m}] = \alpha^2\sigma_1^2 + \beta^2\sigma_2^2$

1.c Determinare α e β in modo che $\hat{m}$ sia non polarizzato e a minima varianza.
Suggerimento: si scelga β in modo che soddisfi la condizione ricavata al punto 1.a e si ottimizzi rispetto ad α.

$J = Var[\hat{m}] = \alpha^2\sigma_1^2 + (1 - \alpha)^2\sigma_2^2$

Impongo $dJ/d\alpha = 0 \Rightarrow 2\alpha\sigma_1^2 - 2(1 - \alpha)\sigma_2^2 = 0 \Rightarrow \alpha = \dfrac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}, \quad \beta = 1 - \alpha$

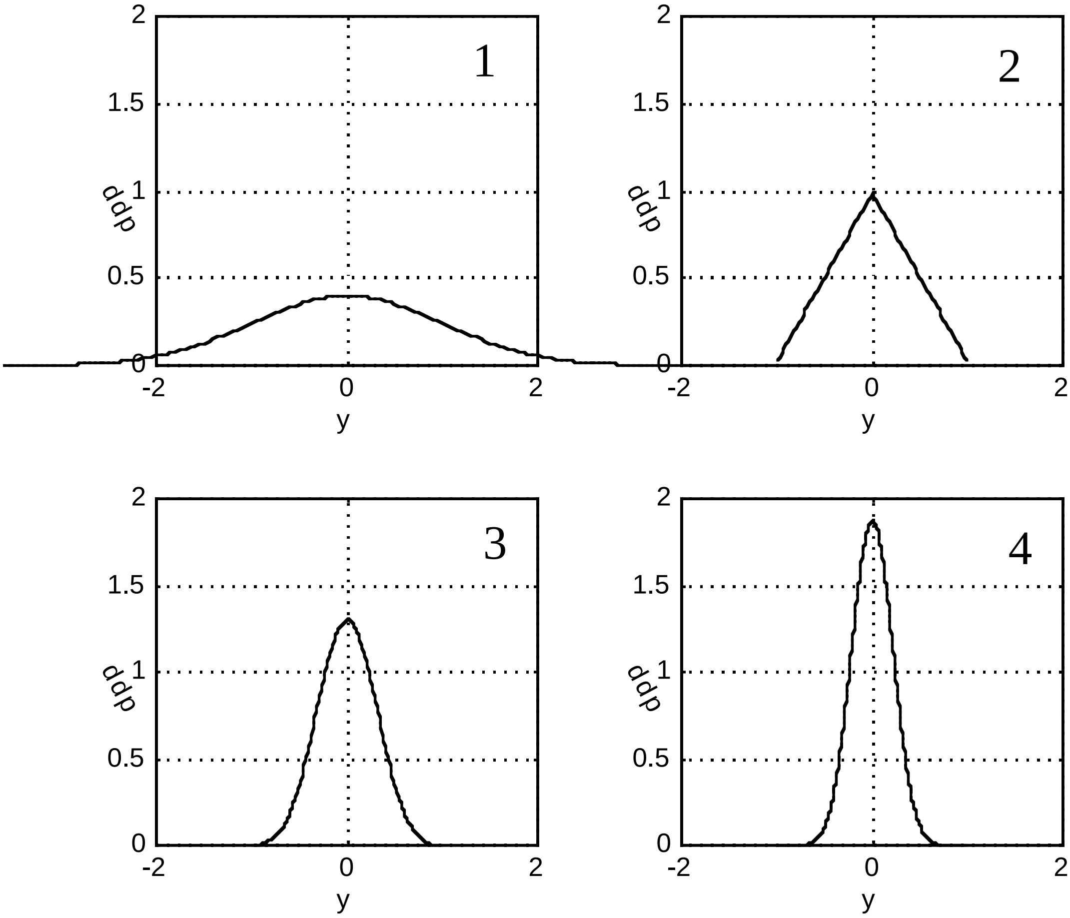
$(d^2J/d\alpha^2 = 2(\sigma_1^2+\sigma_2^2) > 0)$

2. Si considerino le seguenti scelte per la V.C. X

1) $X \sim N(0,1)$ 2) $X = \dfrac{U_1+U_2}{2}$ 3) $X = \dfrac{U_1+U_2+U_3+U_4}{4}$ 4) $X = \dfrac{U_1+U_2+\ldots+U_8}{8}$

dove $U_1, U_2, \ldots$ indicano delle V.C i.i.d. uniformi in [-1,1].

Riportare sopra i seguenti grafici delle densità di probabilità di X il numero della scelta corrispondente.



3. Si consideri un segnale y(t) di cui sono disponibili le seguenti misure:

$y(0) = 0.6 \qquad y(\pi/2) = 0.5 \qquad y(\pi) = -0.4 \qquad y(3\pi/2) = -0.5$

Vi sono due modelli possibili:

(a) $y(t_k) = \theta \sin(t_k) + v_k$

(b) $y(t_k) = \theta_1 \sin(t_k) + \theta_2 \cos(t_k) + v_k$

dove v_k indica un errore di misura.

3.a Supponendo che il modello (a) sia quello giusto calcolare la stima LS di θ.

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.5 \\ -0.4 \\ -0.5 \end{bmatrix}, \quad \Phi = \begin{bmatrix} \sin(0) \\ \sin(\pi/2) \\ \sin(\pi) \\ \sin(3\pi/2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\theta^{LS} = (\Phi'\Phi)^{-1}\Phi'Y = \frac{0.5 + 0.5}{2} = 1/2$$

3.b Supponendo che il modello (b) sia quello giusto calcolare la stima LS di θ.

$$\Phi = \begin{bmatrix} \sin(0) & \cos(0) \\ \sin(\pi/2) & \cos(\pi/2) \\ \sin(\pi) & \cos(\pi) \\ \sin(3\pi/2) & \cos(3\pi/2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \theta = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix},$$

$$\theta^{LS} = (\Phi'\Phi)^{-1}\Phi'Y = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.5 \\ -0.4 \\ -0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

3.c Ipotizzando che gli errori di misura siano i.i.d. ($Var[V] = \sigma^2 I$) scegliere il modello migliore in base al criterio FPE = SSR (N+q)/(N-q).

Modello (a): $\varepsilon = Y - \Phi\theta^{LS} = [\, 0.6 \quad 0 \quad -0.4 \quad 0 \,]'$,

$\varepsilon'\varepsilon = 0.52$, $FPE = 0.52 \times \frac{5}{3} = 0.87$

Modello (b): $\varepsilon = Y - \Phi\theta^{LS} = [\, 0.1 \quad 0 \quad 0.1 \quad 0 \,]'$,

$\varepsilon'\varepsilon = 0.02$, $FPE = 0.02 \times \frac{6}{2} = 0.06$

Scelgo il modello (b)

4. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false:
(Punteggio: risposta esatta = 1, errore = -1, non risponde = 0)

V *F*

- Quando si applica il criterio del "Final Prediction Error" si sceglie il modello che massimizza la cifra di merito FPE.

  ❑ ■

- Se $Y = \Phi\theta + V$, con $E[V] = 0$, e $Var[V] = 5I$, allora lo stimatore LS coincide con lo stimatore BLUE (Best Linear Unbiased Estimator).

  ■ ❑

- Si consideri il modello $y_k = \theta x_k + v_k$, $k=1,\ldots,N$, dove x_k sono noti e v_k sono errori di misura. Allora $\theta^{LS} = \sum_{k=1}^{N} y_k x_k / \sum_{k=1}^{N} x_k^2$.

  ■ ❑

- Nella stima BLUE, quando $Var[V] = \sigma^2 I$, una stima non polarizzata di σ^2 è data da SSR/N.

  ❑ ■

- Si consideri la media campionaria delle V.C. i.i.d. X_i , $i = 1,\ldots,N$ $E[X_i] = m$, $Var[X_i] = 1$. Allora l'intervallo di confidenza al 95% per m è $I_{0.95} = [M_1 - 1.96/\sqrt{N}, M_1 + 1.96/\sqrt{N}]$.

  ■ ❑

- La media campionaria delle V.C. i.i.d. X_i , $i = 1,\ldots,N$, $E[X_i] = m$, $Var[X_i] = \sigma^2$, è uno stimatore di m non polarizzato e asintoticamente normale.

  ■ ❑

- Si indichi con S^2 la varianza campionaria (non corretta) delle V.C. i.i.d. X_i , $i = 1,\ldots,N$ $E[X_i] = m$, $Var[X_i] = \sigma^2$. Allora, $E[S^2] = \sigma^2(N-2)/N$

  ❑ ■

- Se X e Y sono due V.C. congiuntamente gaussiane con $r_{XY} \neq 0$, allora X e Y non sono indipendenti.

  ■ ❑

- La media campionaria delle V.C. i.i.d. X_i , $i = 1,\ldots,N$, $E[X_i] = m$, $Var[X_i] = \sigma^2$, converge in media quadratica a m.

  ■ ❑

- La media campionaria delle V.C. i.i.d. X_i , $i = 1,\ldots,N$, $E[X_i] = m$, $Var[X_i] = \sigma^2$, converge in distribuzione ad una gaussiana standard.

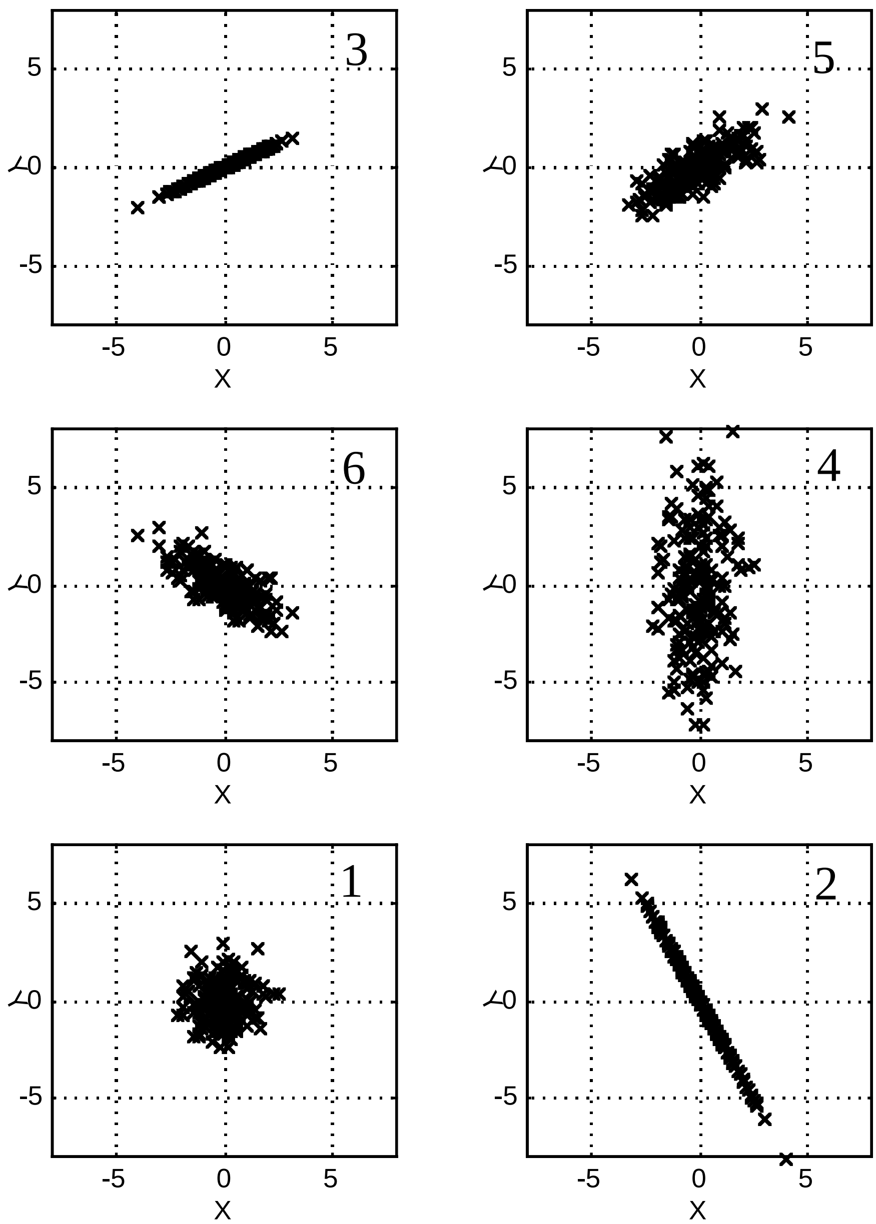
  ❑ ■

Identificazione dei Modelli (MN) 17/7/2002

1. Date due V.C. V e W gaussiane standard e indipendenti tra di loro, si considerino le seguenti alternative per la definizione di X e Y:

1. X= V Y= W	2. X = -V + W Y = 2V - 2W	3. X = V - W Y = 0.5V - 0.5W
4. X= V Y= 3W	5. X = V+W Y = W	6. X = V - W Y = W

Scrivere sopra gli scatter plot il numero della scelta corretta



2. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false:
(Punteggio: risposta esatta = 1, errore = -1, non risponde = 0)

V *F*

- Se due eventi A e B sono indipendenti, allora $P(A|B)P(B|A)=P(AB)$.

  ■ ❑

- La probabilità di ottenere Testa solo una volta lanciando 2 volte una moneta onesta (cioé esattamente un successo su due prove) è pari a 0.5.

  ■ ❑

- Date due V.C. scalari X ed Y, risulta $E[X+Y]=E[X]+E[Y]$ se e solo se X ed Y sono incorrelate.

  ❑ ■

- Date due V.C. scalari X ed Y, risulta $E[X^2+Y^2]=E[X^2]+E[Y^2]$ se e solo se X ed Y sono incorrelate.

  ❑ ■

- Se $E[XY] \neq E[X]E[Y]$, allora X ed Y non sono indipendenti.

  ■ ❑

3. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false:
(Punteggio: risposta esatta = 1, errore = -1, non risponde = 0)

V *F*

- La varianza della media campionaria delle V.C. i.i.d. X_i , $i = 1,\dots,N$, $E[X_i] = m$, $Var[X_i] = \sigma^2$, tende a zero per $N \to \infty$.

  ■ ❑

- Se due V.C. X e Y tra di loro incorrelate sono anche indipendenti, allora esse sono congiuntamente gaussiane.

  ❑ ■

- Uno stimatore polarizzato, ma asintoticamente non polarizzato, può essere consistente.

  ■ ❑

- Se gli errori di misura sono indipendenti e identicamente distribuiti, lo stimatore LS coincide con quello di Gauss-Markov (detto anche BLUE).

  ■ ❑

- FPE e AIC sono equivalenti quando il numero di dati tende all'infinito.

  ■ ❑

4. Si considerino i seguenti dati:

$y(1) = 3$	$y(2) = -2$	$y(3) = 0.5$	$y(4) = -1$
$u_1(1) = 1$	$u_1(2) = -2$	$u_1(3) = 0$	$u_1(4) = 1$
$u_2(1) = -1$	$u_2(2) = 0$	$u_2(3) = 2$	$u_2(4) = 1$

Si ipotizza che i dati siano generati dal seguente modello:

$y(t) = \theta_1\, u_1(t) + \theta_2\, u_2(t) + v(t)\,,\ t = 1, 2, 3, 4$

dove $v(t)$ sono errori di misura tra loro indipendenti con $Var[v(t)] = 1$.

4.a Calcolare la stima LS di θ.

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 0.5 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

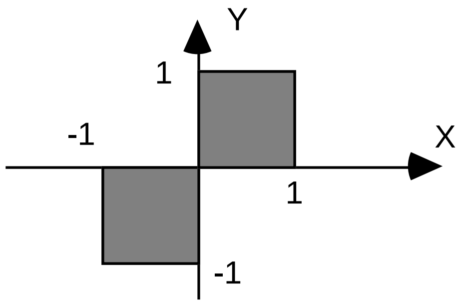
$$\theta^{LS} = (\Phi'\Phi)^{-1}\Phi'Y = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.5 \end{bmatrix}$$

4.b Calcolare la matrice varianza dei parametri stimati

$$Var[\hat{\theta}] = \sigma^2\, (\Phi'\Phi)^{-1} = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}^{-1}$$

Identificazione dei Modelli (MN) 5/9/2002

1. Si considerino le due V.C. X e Y, coordinate di un punto scelto in modo equiprobabile nella regione tratteggiata.



1.a Ricavare e tracciare il grafico di $f_X(x)$ e $f_Y(y)$.

Dato che lo spazio degli esiti è equiprobabile

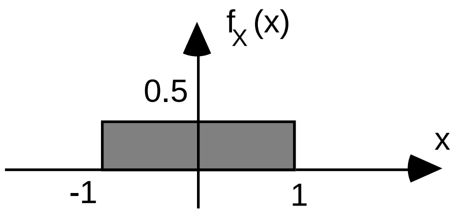
$$f_{XY}(x,y) = \frac{1}{\text{Area dei quadrati}} = 0.5\ , \text{ nella regione tratteggiata}$$

Pertanto:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\, dy = 0.5\ ,\ -1 \le x \le 1$$

Per simmetria:

$$f_Y(y) = 0.5\ ,\ -1 \le y \le 1$$



1.b Dire, motivando la risposta, se X e Y sono indipendenti.

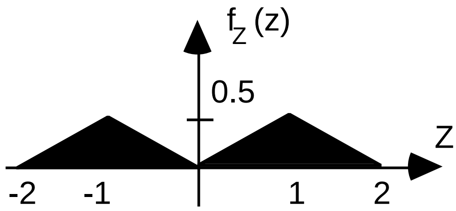
Non sono indipendenti. Se so che $X > 0$, ne segue che $P(Y > 0) = 1$. Pertanto $f_{Y|X} \neq f_Y$.

1.c Dire, motivando la risposta, se X e Y sono incorrelate.

Non sono incorrelate. Dato che $P(XY > 0) = 1$, ne segue che $E[XY] > 0$ mentre $E[X]E[Y] = 0$.

1.c Ricavare e tracciare il grafico di $f_Z(z)$ dove $Z = X+Y$.

$f_Z(z) = f_Z(z\,|\,X \ge 0)P(X \ge 0) + f_Z(z\,|\,X < 0)P(X < 0)$. Ovviamente, $P(X \ge 0) = 0.5$ è la probabilità di cadere nel quadrato in alto a destra. Considerando tale quadrato, si vede facilmente che $f_Z(z\,|\,X \ge 0)$ è la ddp della somma di due V.C. uniformi in [0,1] tra loro indipendenti. Quindi, $f_Z(z\,|\,X \ge 0)$ è a triangolo in [0,2]. Analogamente, $f_Z(z\,|\,X < 0)$, che è la ddp della somma di due V.C. uniformi in [-1,0] tra loro indipendenti, è una ddp a triangolo in [-2,0].



2. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false:
(Punteggio: risposta esatta = 1, errore = -1, non risponde = 0)

	V	*F*
• Se $P(B) \neq 0$, risulta sempre $P(AB) = P(A \mid B)P(B)$.	■	❑
• Dati due eventi A e B, non può mai accadere che $P(A)+P(B) > 1$.	❑	■
• La probabilità di non avere nessun evento di Posson in un intervallo di durata T è pari a $1\text{-}\exp(-\lambda T)$. *Suggerimento: il tempo di attesa tra due eventi di Poisson successivi ha una distribuzione …*	■	❑
• Se $E[X^2] = 0$, allora ne segue che $E[X] = 0$ e $Var[X] = 0$.	■	❑
• Se $Y=2X$, allora $f_Y(y) = 2f_X(y)$.	❑	■

3. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false:
(Punteggio: risposta esatta = 1, errore = -1, non risponde = 0)

	V	*F*
• Date delle V.C. i.i.d. X_i , $i = 1,\dots,N$, $E[X_i] = m$, $Var[X_i] =\sigma^2$, la varianza della media campionaria non è detto che coincida con la media della varianza campionaria.	■	❑
• Date due V.C. congiuntamente gaussiane X e Y, la V.C. $Z = X+Y$ è gaussiana se e solo se X e Y sono incorelate.	❑	■
• Se si confronta uno stimatore polarizzato con uno stimatore non polarizzato è ragionevole preferire quello che ha varianza minore.	❑	■
• Sia $Y = \Phi\theta+V$, con $E[V] = 0$, e $Var[V] = \sigma^2 I$. Se θ è scalare, $Var[\theta^{LS}] \leq \sigma^2$.	❑	■
• Se $Y = \Phi\theta+V$, con $E[V] = 0$, allora $Var[\theta^{LS}]$ dipende da Φ e $Var[V]$, ma non dal vettore Y.	■	❑

3. Si consideri un segnale y(t) di cui sono disponibili le seguenti misure:

$y(-\pi/2) = -0.5$, $y(0) = 1$, $y(\pi/2) = 1$

Vi sono due modelli possibili:

(a) $y(t_k) = \theta\, t_k + v_k$

(b) $y(t_k) = \theta_1 t_k + \theta_2 \cos(t_k) + v_k$

dove v_k indica un errore di misura. Gli errori di misura sono V.C. i.i.d. ($Var[V] = \sigma^2 I$).

3.a Supponendo che il modello (a) sia quello giusto calcolare la stima LS di θ.

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} -0.5 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\pi/2 \\ 0 \\ \pi/2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\theta}^{LS} = (\Phi'\Phi)^{-1}\Phi'Y = \frac{3}{2\pi}$$

3.b Dire, motivando la risposta, se il modello (b) è lineare nei parametri. In caso affermativo, supponendo che il modello (b) sia quello giusto, calcolare la stima LS di θ.

Il modello è lineare nei parametri perché dipende linearmente da θ_1 e θ_2.

$$\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} -\pi/2 & \cos(-\pi/2) \\ 0 & \cos(0) \\ \pi/2 & \cos(\pi/2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\pi/2 & 0 \\ 0 & 1 \\ \pi/2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\theta}^{LS} = (\Phi'\Phi)^{-1}\Phi'Y = \begin{bmatrix} \pi^2/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -\pi/2 & 0 & \pi/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.5 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2\pi} \\ 1 \end{bmatrix}$$

3.c Se il modello (b) è lineare nei parametri, scegliere il modello migliore in base al criterio FPE = SSR (N+q)/(N-q).

Modello (a): $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{Y} - \mathbf{\Phi}\boldsymbol{\theta}^{LS} = [\ 1/4 \quad 1 \quad 1/4\ ]'$,

$\boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{\varepsilon} = 9/8$, $\quad \mathbf{FPE} = \frac{9}{8} \times \frac{4}{2} = \frac{9}{4}$

Modello (b): $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{Y} - \mathbf{\Phi}\boldsymbol{\theta}^{LS} = [\ 1/4 \quad 0 \quad 1/4\ ]'$,

$\boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{\varepsilon} = 1/8$, $\quad \mathbf{FPE} = \frac{5}{8}$

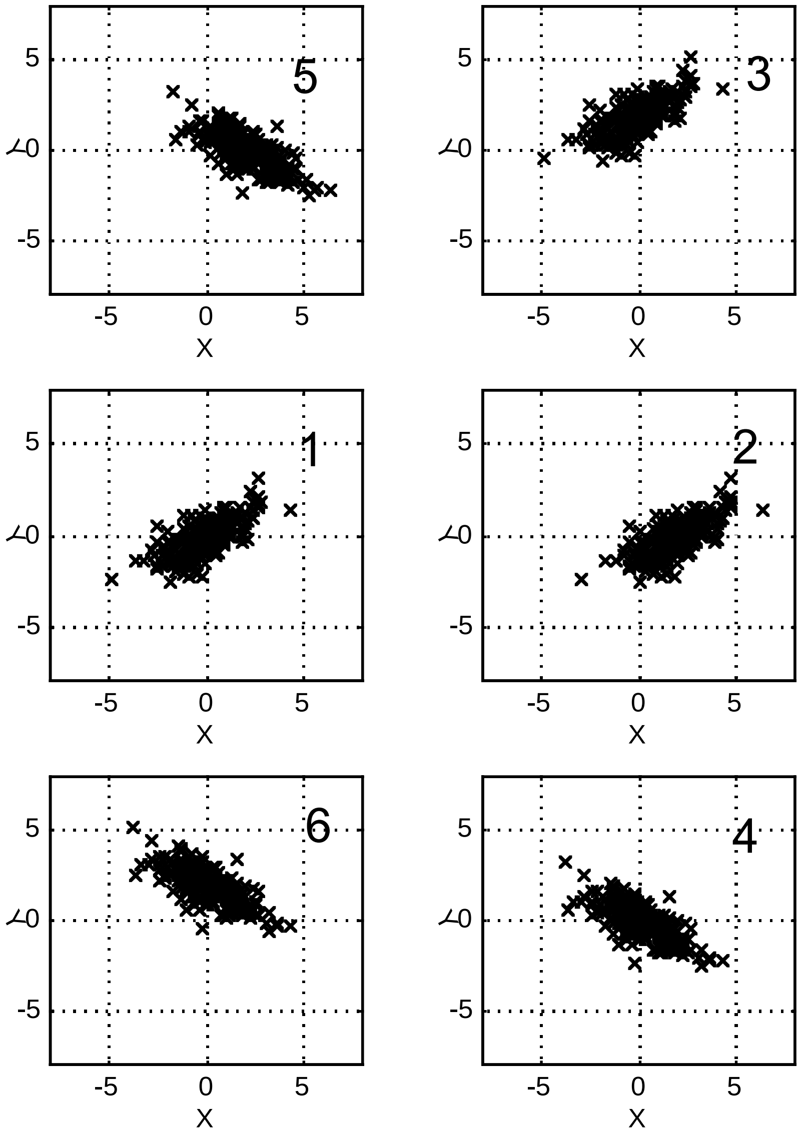
Scelgo il modello (b)

Identificazione dei Modelli (MN) 25/9/2002

1. Date due V.C. V e W gaussiane standard e indipendenti tra di loro, si considerino le seguenti alternative per la definizione di X e Y:

1. X= V+W Y= W	2. X = V + W+2 Y = W	3. X = V + W Y = W+2
4. X= V - W Y= W	5. X = V - W + 2 Y = W	6. X = V - W Y = W + 2

Scrivere sopra gli scatter plot il numero della scelta corretta



2. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false:
(Punteggio: risposta esatta = 1, errore = -1, non risponde = 0)

	V	F
• Se A e B sono indipendenti, allora AB = {0}.	❑	■
• Se M_1 e M_2 sono tali che $M_1 M_2 = \{0\}$, $M_1 + M_2 = \mathcal{S}$, allora $P(A) = P(A \mid M_1) + P(A \mid M_2)$.	❑	■
• Date due V.C. X ed Y, risulta sempre $E[X^2+Y^2] = E[X^2] + E[Y^2]$.	■	❑
• Date due V.C. X ed Y, $F_{XY}(x,y) = P(X \leq x)\, P(Y \leq y)$.	❑	■
• Se $X \sim N(0,\sigma^2)$, allora $P(X \leq 1.96\sigma) = 0.975$.	■	❑

3. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false:
(Punteggio: risposta esatta = 1, errore = -1, non risponde = 0)

	V	F
• Date delle V.C. i.i.d. X_i , $i = 1,\ldots,N$, $E[X_i] = m$, $Var[X_i] = \sigma^2$, la media campionaria $\bar{X}$ ha media m e varianza σ^2/N. Inoltre, la media campionaria è asintoticamente gaussiana.	■	❑
• Date delle V.C. i.i.d. X_i , $i = 1,\ldots,N$, $E[X_i] = m$, $Var[X_i] = \sigma^2$, risulta sempre che $E\left[\frac{1}{N-1}\left[\sum_{i=1}^{N}(X_i-\bar{X})^2\right]\right] = \sigma^2$.	■	❑
• Se si confrontano due stimatori non polarizzati, è ragionevole preferire quello che ha varianza minore.	■	❑
• Sia $Y = \Phi\,\theta + V$, con $E[V] = 0$, e $Var[V] = \sigma^2 I$. Allora $Var[\theta^{LS}] = (\Phi'\Phi)^{-1}\sigma^2$.	■	❑
• Siano SSR_1 e SSR_2 le somme dei quadrati dei residui associate alle stime LS dei parametri dei due modelli: 1) $y(t) = \theta_1 u_1(t) + v(t)$; 2) $y(t) = \theta_1 u_1(t) + \theta_2 u_2(t) + v(t)$. Allora, $SSR_1 \geq SSR_2$.	■	❑

4. Si consideri un segnale y(t) di cui sono disponibili le seguenti misure:

$y(-2) = 1$, $y(-1) = -2$, $y(1) = 2$, $y(2) = 1$

Vi sono due modelli possibili:

(a) $y(t_k) = \theta + v_k$

(b) $y(t_k) = \theta_1 + \theta_2 t_k + v_k$

dove v_k indica un errore di misura. Gli errori di misura sono V.C. i.i.d. ($Var[V] = \sigma^2 I$).

4.a Supponendo che il modello (a) sia quello giusto calcolare la stima LS di θ.

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\theta^{LS} = (\Phi'\Phi)^{-1}\Phi'Y = 1/2$$

4.b Supponendo che il modello (b) sia quello giusto, calcolare la stima LS di θ.

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & t_1 \\ 1 & t_2 \\ 1 & t_3 \\ 1 & t_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \theta = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix},$$

$$\theta^{LS} = (\Phi'\Phi)^{-1}\Phi'Y = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 2/5 \end{bmatrix}$$

4c Scegliere il modello migliore in base al criterio FPE = SSR (N+q)/(N-q).

Modello (a): $\varepsilon = Y - \Phi\theta^{LS} = [\ 1/2 \quad -5/2 \quad 3/2 \quad 1/2\ ]'$,

$\varepsilon'\varepsilon = 9$, $FPE = 9 \times \frac{5}{3} = 15$

Modello (a): $\varepsilon = Y - \Phi\theta^{LS} = [\ -3/10 \quad 1/10 \quad 9/10 \quad 13/10\ ]'$,

$\varepsilon'\varepsilon = 7.4$, $FPE = 7.4 \times \frac{6}{2} = 22.2$

Scelgo il modello (a)