Identificazione dei Modelli e Analisi dei Dati **3/5/2002**

I prova in itinere

1. Si indichi con X una V.C. gaussiana con $E[X] = 2$, $Var[X] = 1$.

1.a Calcolare $E[X^2]$.

$$\mathbf{Var[X] = E[X^2] - E[X]^2}$$

$$\mathbf{E[X^2] = Var[X] + E[X]^2 = 5}$$

1.b Dimostrare che $E[\chi^2_N] = N$, dove χ^2_N indica la V.C "chi quadro" ad N gradi di libertà.

Suggerimento: date N variabili gaussiane standard Z_i, indipendenti , $\chi^2_N = \ldots$

$$\boldsymbol{\chi^2_N = Z_1^2 + Z_2^2 + \ldots + Z_N^2}$$

$$\mathbf{E[\boldsymbol{\chi}^2_N] = \sum_{i=1}^{N} E[Z_i^2] = N}$$

Infatti, $\mathbf{E[Z_i^2] = Var[Z_i] + E[Z_i]^2 = 1}$

2. Date delle V.C. X e Y congiuntamente gaussiane con E[X] = E[Y] = 0, si considerino le seguenti triplette di varianze e covarianze:

1) $\sigma_X{}^2 = 9$, $\sigma_Y{}^2 = 1$, $\sigma_{XY} = 0$

2) $\sigma_X{}^2 = 1$, $\sigma_Y{}^2 = 9$, $\sigma_{XY} = 0$

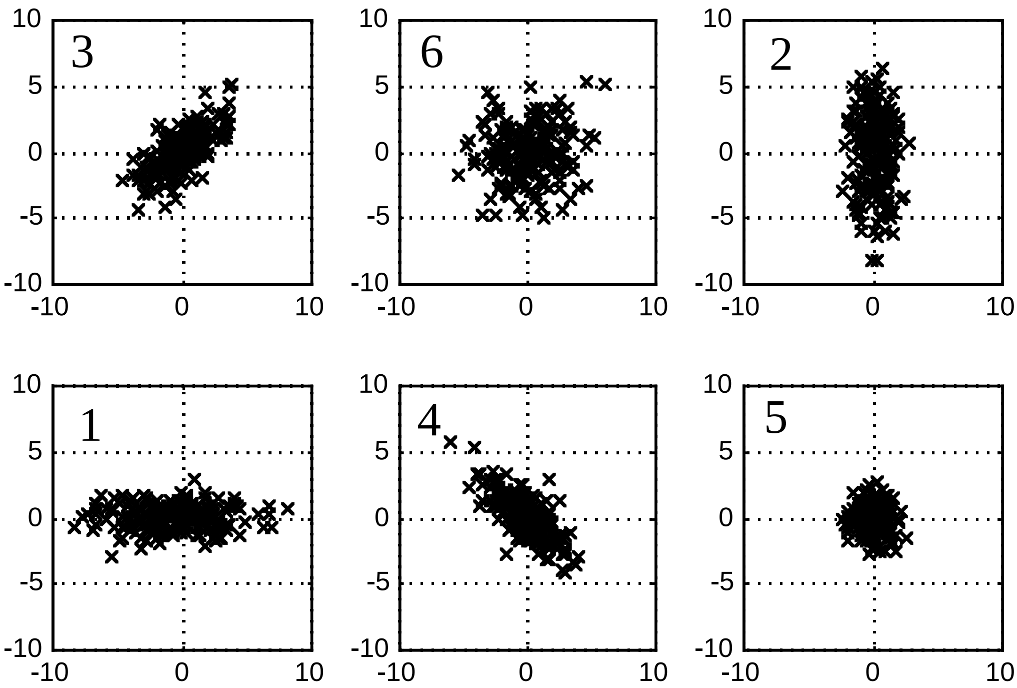
3) $\sigma_X{}^2 = 3$, $\sigma_Y{}^2 = 3$, $\sigma_{XY} = 2.1$

4) $\sigma_X{}^2 = 3$, $\sigma_Y{}^2 = 3$, $\sigma_{XY} = -2.1$

5) $\sigma_X{}^2 = 1$, $\sigma_Y{}^2 = 1$, $\sigma_{XY} = 0$

6) $\sigma_X{}^2 = 4$, $\sigma_Y{}^2 = 4$, $\sigma_{XY} = 0$

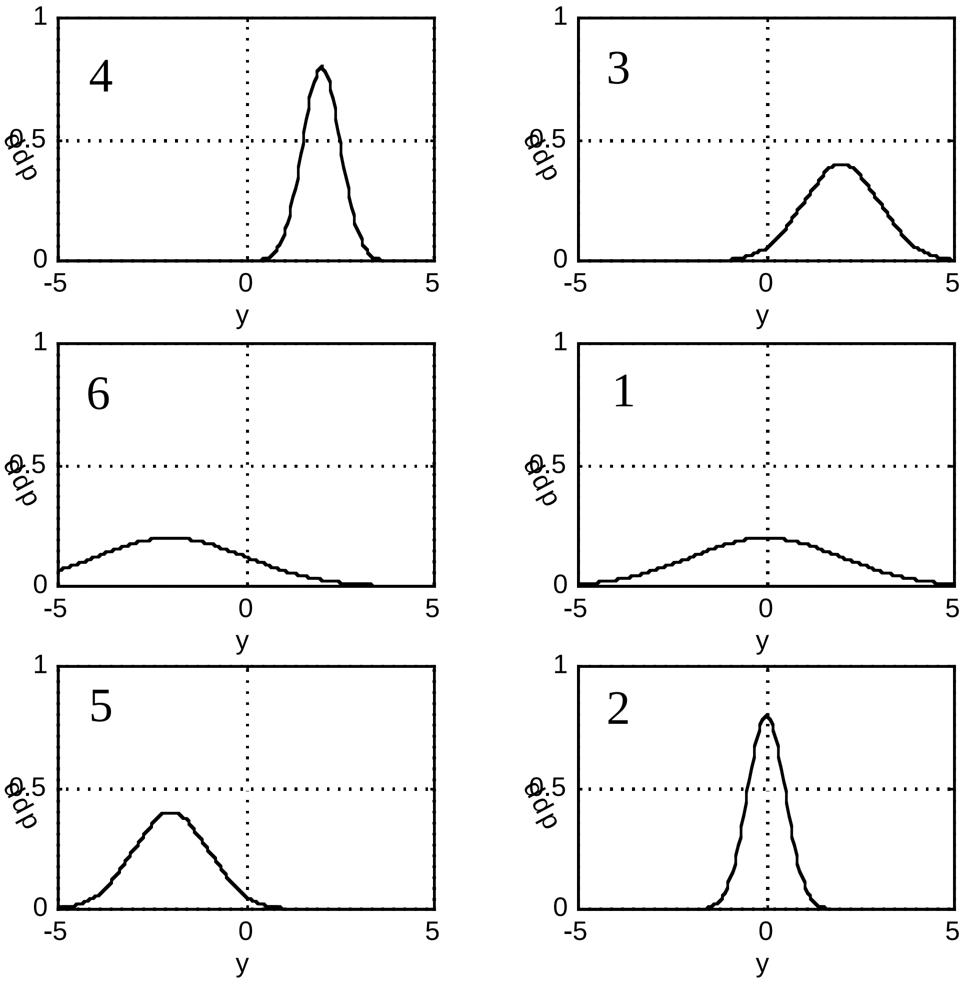
Riportare sopra i seguenti scatter plot il numero della corrispondente tripletta $\sigma_X{}^2$, $\sigma_Y{}^2$, σ_{XY}



3. Sia $Y = \alpha Z + \beta$, dove $Z \sim N(0,1)$. Si considerino le seguenti scelte per i parametri α e β:

1) $\alpha = -2$,	$\beta = 0$	2) $\alpha = -0.5$,	$\beta = 0$
3) $\alpha = 1$,	$\beta = 2$	4) $\alpha = 0.5$,	$\beta = 2$
5) $\alpha = -1$,	$\beta = -2$	6) $\alpha = 2$,	$\beta = -2$

Riportare sopra i seguenti grafici delle densità di probabilità di Y il numero della corrispondente coppia α,β



4. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false:
(Punteggio: risposta esatta = 1, errore = -1, non risponde = 0)

V *F*

- Se Y è una V.C. lognormale, allora $X = e^Y$ è una V.C. gaussiana.

❑ ■

- Lanciando due volte una moneta onesta la probabilità di ottenere testa almeno una volta è pari a 0.75.

■ ❑

- Un sacchetto contiene una moneta onesta ed una moneta truccata con P(Testa) = 0.7. Si sceglie ad occhi chiusi una moneta e la si lancia. In tale esperimento, P(Testa) = 0.6.

■ ❑

- Nell'identificazione ai minimi quadrati di un modello lineare nei parametri, se n=q, la condizione di identificabilità è sicuramente verificata (n: numero dei dati, q: numero dei parametri).

❑ ■

- Se identifico mediante i minimi quadrati una famiglia di modelli gerarchici, la somma dei quadrati dei residui decresce al crescere del numero dei parametri del modello.

■ ❑

- L'uso del criterio FPE (sotto le sue ipotesi di applicabilità) conduce ad una stima polarizzata del numero dei parametri del modello..

■ ❑

- Se $Y = \Phi\theta + V$, con $E[V] = 0$, e $Var[V] = \sigma^2 I$, allora lo stimatore LS coincide con lo stimatore BLUE (Best Linear Unbiased Estimator).

■ ❑

- Si consideri la media campionaria delle V.C. i.i.d. X_i , $i = 1,\ldots,N$, $E[X_i] = m$. Allora, se N quadruplica, l'intervallo di confidenza per m si dimezza.

■ ❑

- Se X e Y sono due V.C. congiuntamente gaussiane con $E[XY] = E[X]E[Y]$, allora X e Y sono indipendenti.

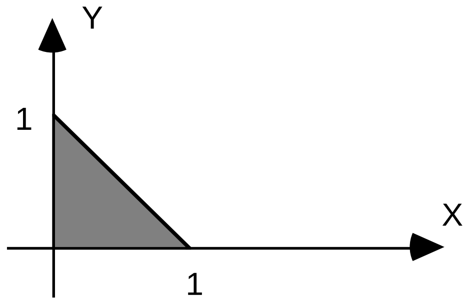
■ ❑

- Si consideri la media campionaria delle V.C. i.i.d. X_i , $i = 1,\ldots,100$, $E[X_i] = m$, $Var[X_i] =1$. Allora l'intervallo di confidenza al 95% per m è $I_{0.95} = [\bar{X}-\delta, \bar{X}+\delta]$ con $\delta < 0.2$.

■ ❑

Identificazione dei Modelli e Analisi dei Dati (parte I) 27/6/2002

1. Si considerino le due V.C. X e Y, coordinate di un punto scelto in modo equiprobabile nel triangolo riportato in figura.



1.a Ricavare la d.d.p. congiunta $f_{XY}(x,y)$.

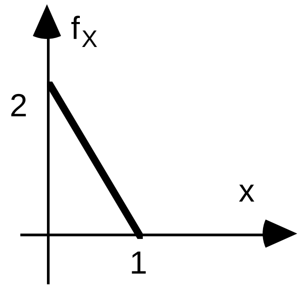
Dato che lo spazio degli esiti è equiprobabile,

$f_{XY}(x,y)$ = 1/(Area del triangolo) = 1/0.5 = 2, nel triangolo
$f_{XY}(x,y) = 0$, altrove

1.b Ricavare $f_X(x)$ e tracciarne il grafico.

$$f_X(x) = \int_0^{1-x} 2dy = 2(1-x),\ 0 \le x \le 1$$

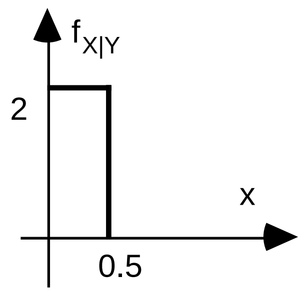
$f_X(x) = 0$, altrove



1.c Ricavare $f_{X|Y}(x \mid Y=0.5)$ e tracciarne il grafico.

$$f_{X|Y}(x \mid Y=0.5) = \frac{f_{XY}(x,0.5)}{f_Y(0.5)} = 2\ ,\ 0 \le x \le 0.5$$

$f_{X|Y}(x \mid Y=0.5) = 0$, altrove



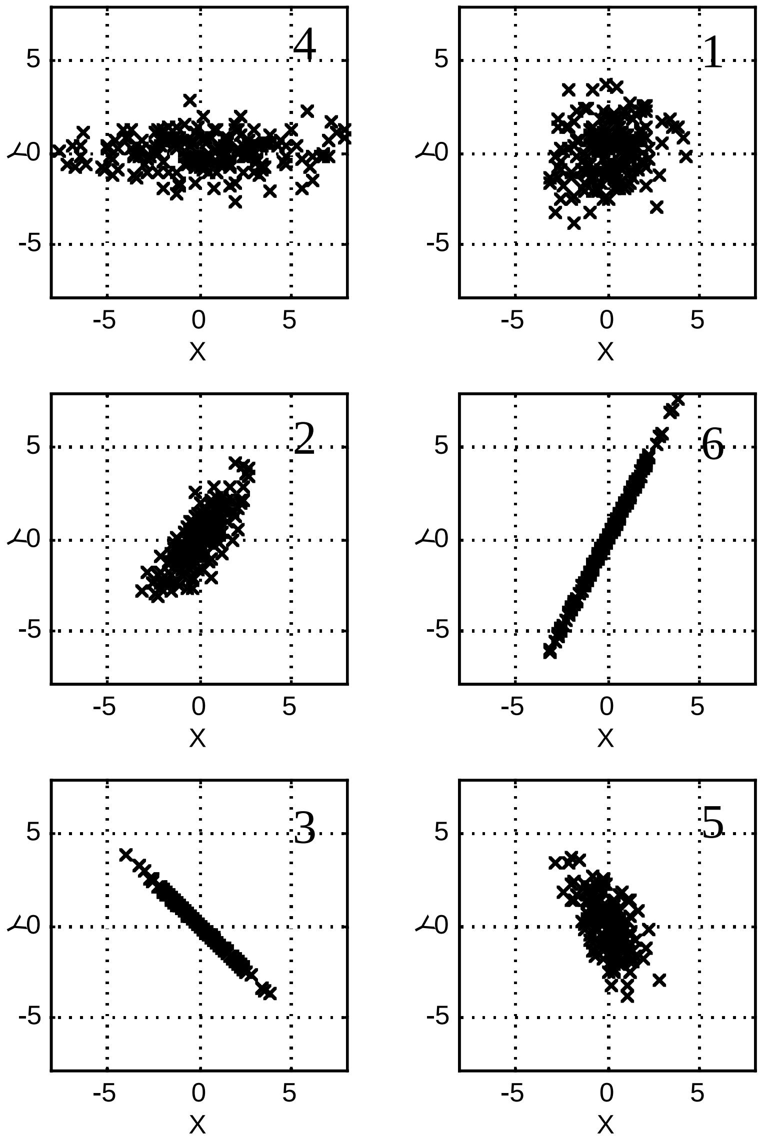
1.d Dire, motivando la risposta, se X e Y sono indipendenti.

No, perchè $f_{X|Y}(x \mid Y=0.5) \neq f_X(x)$.

2. Date due V.C. V e W gaussiane standard e indipendenti tra di loro, si considerino le seguenti alternative per la definizione di X e Y:

1. X= V+ W Y= V - W	2. X = V Y = V + W	3. X = V - W Y = -V + W
4. X= 3V Y= W	5. X = W Y = V-W	6. X = V + W Y = 2V + 2W

Scrivere sopra gli scatter plot il numero della scelta corretta



3. Dimostrare le seguenti relazioni

3.a $Var[X] = E[X^2] - E[X]^2$

$Var[X] = E[(X-E[X])^2] = E[X^2] -2E[X]^2 + E[X]^2 = E[X^2] - E[X]^2$

3.b $Cov[X,Y] = E[XY] - E[X]E[Y]$

$Cov[X,Y] = E[(X-E[X]) (Y-E[Y])] = E[XY] - 2E[X] E[Y] + E[X] E[Y] = E[XY] - E[X] E[Y]$

---

4. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false:
(Punteggio: risposta esatta = 1, errore = -1, non risponde = 0)

	V	*F*
• Se due eventi A e B sono indipendenti, allora P(A+B)=P(A)+P(B).	❑	■
• $Var[X+Y]=Var[X]+Var[Y]$ se e solo se X e Y sono indipendenti.	❑	■
• Se $Y:=X+b$, allora $f_Y(y) = f_X(y-b)$.	■	❑
• L'uso del criterio MDL (sotto le sue ipotesi di applicabilità) conduce ad una stima non polarizzata del numero dei parametri del modello.	■	❑
• Uno stimatore $\hat{\theta}$ si dice consistente se $E[\hat{\theta}]= \theta$.	❑	■

Identificazione dei Modelli e Analisi dei Dati **27/6/2002**
II prova in itinere

1. Si consideri il seguente processo casuale

$$y(t) = -0.9y(t-1) + w(t-1) + 10w(t-2), \qquad w(\cdot) \sim WGN(0,1)$$

1.a Ricavare il fattore spettrale canonico.

$$Y(z) = \frac{z^{-1} + 10z^{-2}}{1 + 0.9z^{-1}} W(z) \Rightarrow G(z) \frac{z + 10}{z^2 + 0.9z}, \text{ non canonico}$$

$$T(z) = 10\frac{z + 1/10}{z + 10}, \; zG(z)T(z) = 10\frac{z + 1/10}{z + 0.9}, \text{ non canonico}$$

$$\hat{G}(z) = \frac{1 + 0.1z^{-1}}{1 + 0.9z^{-1}}, \; \hat{\sigma}^2 = 100$$

1.b Ricavare il predittore ottimo ad un passo per il seguente modello ARMAX:

$$y(t) = -0.9y(t-1) + 2u(t-1) + 10u(t-2) + w(t-1) + 10w(t-2), \qquad w(\cdot) \sim WGN(0,1)$$

$A(z)Y(z) = z^{-1}B(z)U(z) + C(z)W(z)$, $A(z) = 1 + 0.9z^{-1}$, $B(z) = 2 + 10z^{-1}$, $C(z) = z^{-1} + 10z^{-2}$

Devo rendere canonico C(z)/A(z):

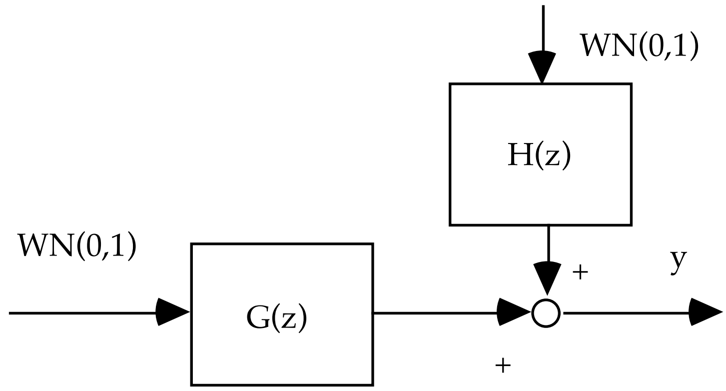
$A(z)Y(z) = z^{-1}B(z)U(z) + \hat{C}(z)\hat{W}(z)$, $\hat{C}(z) = 1 + 0.1z^{-1}$, $\hat{w}(\cdot) \sim WGN(0,100)$

$\hat{C}(z)\hat{Y}(z) = [\hat{C}(z) - A(z)]Y(z) + z^{-1}B(z)U(z)$

$\hat{y}(t|t-1) + 0.1\hat{y}(t-1|t-2) -0.8y(t-1) + 2u(t-1) + 10u(t-2)$

$\hat{y}(t|t-1) = - 0.1\hat{y}(t-1|t-2) -0.8y(t-1) + 2u(t-1) + 10u(t-2)$

2. Si consideri il seguente schema a blocchi in cui i rumori bianchi sono tra loro indipendenti:



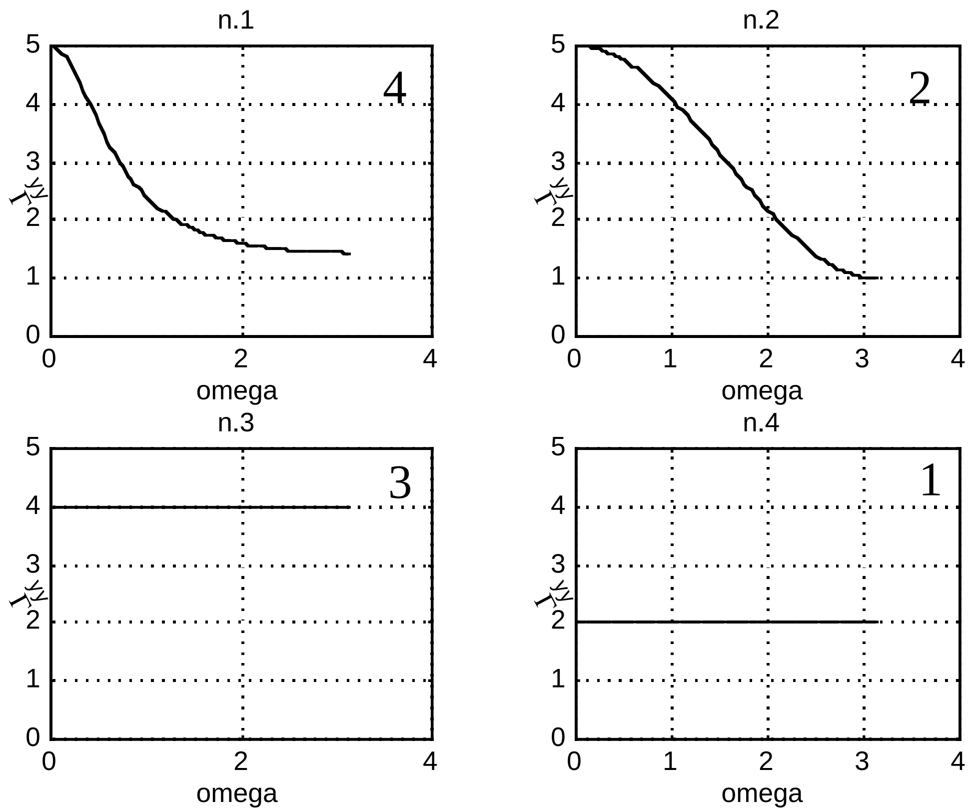
Scrivere sopra ciascuno spettro il numero che identifica i corrispondenti valori delle funzioni di trasferimento G(z) e H(z).

1. $G(z) = \frac{1}{2}\,\frac{1+2z^{-1}}{1+0.5z^{-1}}$
$H(z) = 1$

2. $G(z) = 1+z^{-1}$
$H(z) = 1$

3. $G(z) = 1+z^{-1}$
$H(z) = 1-z^{-1}$

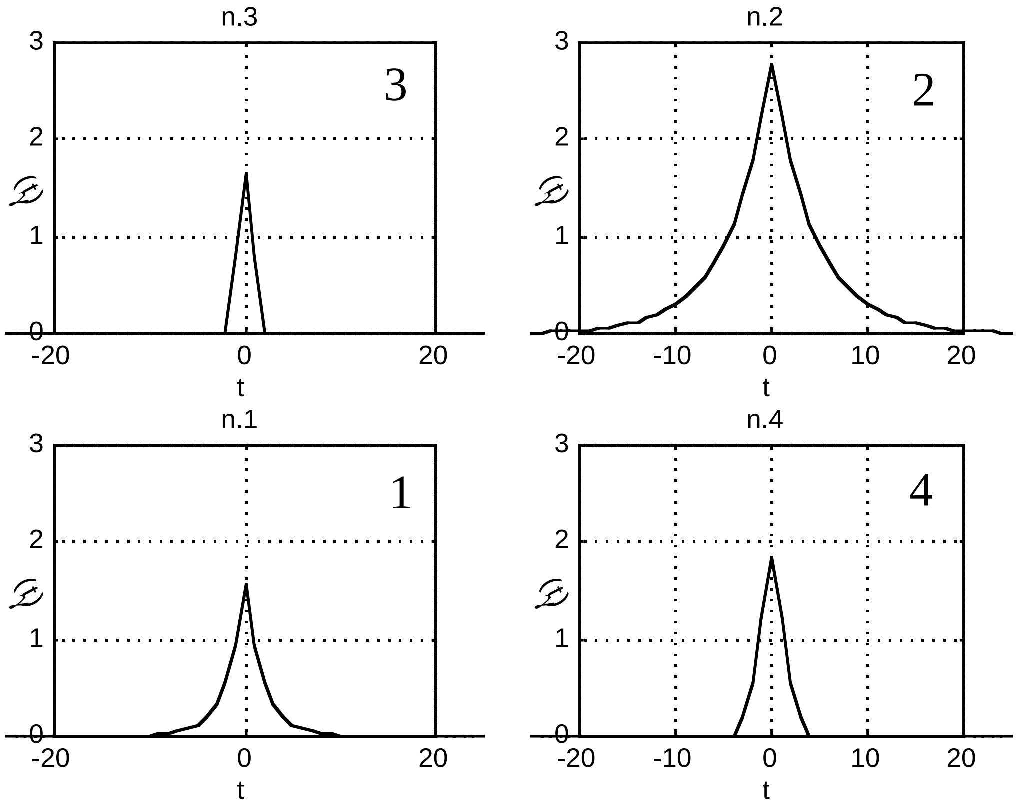
4. $G(z) = \frac{1}{1-0.5z^{-1}}$
$H(z) = z^{-1}$



3. Si scriva sopra il grafico delle funzioni di autocovarianza il numero del corrispondente fattore spettrale (in tutti e quattro i casi $\sigma^2 = 1$)

1. $G(z) = \dfrac{1}{1\text{-}0.6z^{-1}}$ **2.** $G(z) = \dfrac{1}{1\text{-}0.8z^{-1}}$

3. $G(z) = 1+0.8z^{-1}$ **4.** $G(z) = 1+0.8z^{-1}+0.4z^{-2}+0.2z^{-3}$



4. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false:
(Punteggio: risposta esatta = 1, errore = -1, non risponde = 0)

	V	*F*
• L'algoritmo della backpropagation è esposto a problemi di velocità di convergenza e di minimi locali	■	❑
• Dato un P.C. stazionario x(t), se $y(t) := \alpha\, x(t)$, allora $Var[y(t)]=\alpha^2 Var[x(t)]$	■	❑
• Nell'addestramento delle reti neurali, l'errore di stima dipende criticamente dal numero di dati disponibili.	■	❑
• Nell'addestramento delle reti neurali, l'errore di approssimazione cresce al crescere dell'ordine del modello.	❑	■
• Se $y(t) := v(t) - v(t-1)$, $v(t) \sim WN$, allora risulta sempre $Var[y(t)] = 2Var[v(t)]$.	■	❑
• Se y(t) è un P.C. a spettro razionale, non può esistere $\bar{\omega}$ tale che $\Gamma_{yy}(\bar{\omega}) = 0$.	❑	■
• Il periodogramma è uno stimatore polarizzato e non consistente dello spettro.	■	❑
• Se y(t) è un P.C. di tipo MA(1) il massimo dello spettro $\Gamma_{yy}(\omega)$ si trova sempre in $\omega=0$ oppure $\omega=\pi$.	■	❑
• Il predittore ottimo ad un passo $y(t \mid t-1)$ non può dipendere da $y(t-k)$, con $k \geq 2$.	❑	■
• L'impulso discreto ($u(0)=1$, $u(t)=0$, $t \neq 0$) è persistentemente eccitante di ordine 1.	❑	■

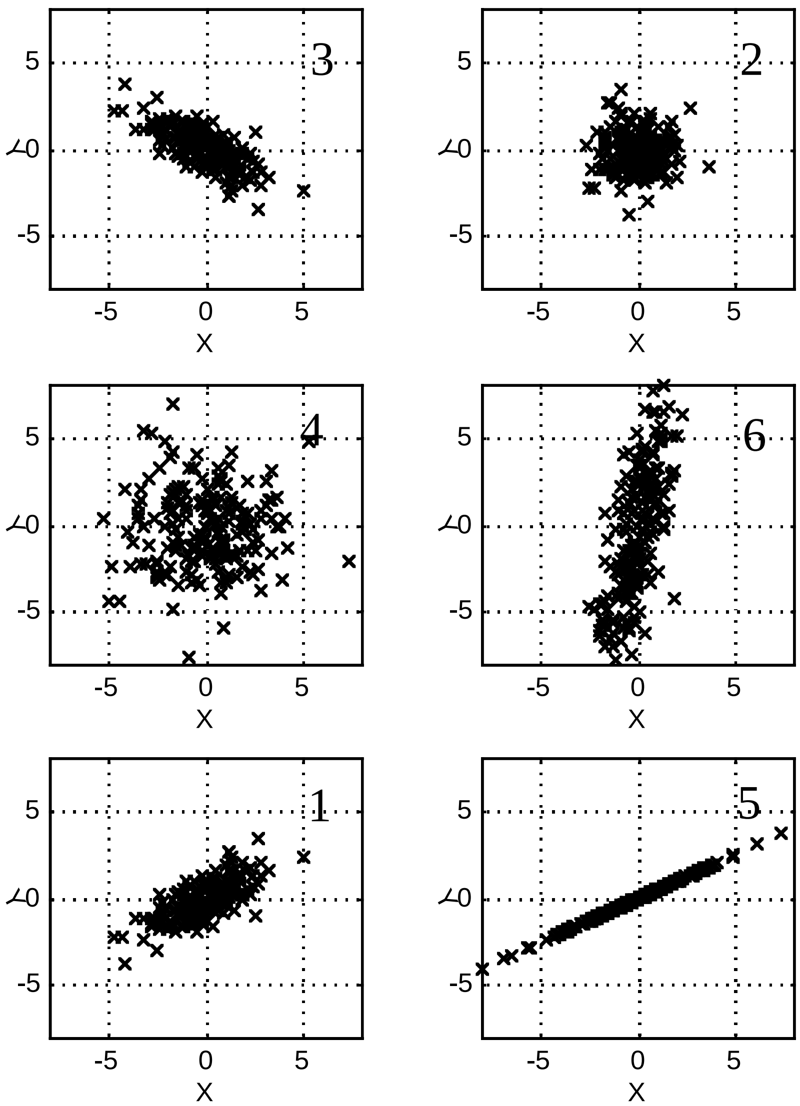
Identificazione dei Modelli e Analisi dei Dati (parte I) 16/7/2002

1. Date due V.C. V e W congiuntamente gaussiane con $\sigma_V^2 = 2$, $\sigma_W^2 = 1$, $\sigma_{VW} = 1$, si considerino le seguenti alternative per la definizione di X e Y:

1. $X = V$ $Y = W$	2. $X = V - W$ $Y = W$	3. $X = V$ $Y = -W$
4. $X = 2V - 2W$ $Y = 2W$	5. $X = V + W$ $Y = 0.5V + 0.5W$	6. $X = V/\sqrt{2}$ $Y = 4W$

Scrivere sopra gli scatter plot il numero della scelta corretta

Suggerimento: Essendo nota la matrice varianza del vettore [V W]', si può procedere al calcolo della matrice varianza del vettore [X Y]' …



2. Si consideri un segnale y(t) di cui sono disponibili le seguenti misure:

$y(-2) = 4 \qquad y(-1) = 1 \qquad y(1) = 0 \qquad y(2) = 0$

Si ipotizza che i dati siano generati dal seguente modello:

$y(t_k) = \theta_1 t_k + \theta_2 t_k^2 + v_k$

dove v_k sono errori di misura tra loro indipendenti con $\mathrm{Var}[v_k] = 0.1$.

2.a Calcolare la stima LS di θ.

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} -2 & (-2)^2 \\ -1 & (-1)^2 \\ 1 & 1^2 \\ 2 & 2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\theta}^{LS} = (\mathbf{\Phi}'\mathbf{\Phi})^{-1}\mathbf{\Phi}'\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 34 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.9 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

2.b Calcolare la matrice varianza dei parametri stimati

$$\boldsymbol{\sigma}^2(\mathbf{\Phi}'\mathbf{\Phi})^{-1} = 0.1 \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 34 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 \\ 0 & 0.0029 \end{bmatrix}$$

3. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false:
(Punteggio: risposta esatta = 1, errore = -1, non risponde = 0)

V *F*

- Se due eventi A e B sono disgiunti, allora P(A+B)=P(A)+P(B).

  ■ ❑

- Dati tre eventi A, B, C, risulta sempre P(A+B+C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC).

  ■ ❑

- Si consideri una moneta onesta. La probabilità di ottenere la sequenza TTTT è uguale alla probabilità di ottenere la sequenza TCTC.

  ■ ❑

- Si considerino degli eventi di Poisson con frequenza media λ. Se in t = 0 c'é stato un evento, la probabilità di avere almeno un altro evento di Poisson nell'intervallo (0,T] è pari a $\lambda e^{-\lambda T}$.

  ❑ ■

- Data una V.C. X scalare ed una funzione $g(\cdot)$, risulta sempre $E[g(X)] = g(E[X])$.

  ❑ ■

- Siano V e W due V.C. indipendenti. Se X = aV+bW, Y=cV+dW, allora X e Y sono sempre indipendenti.

  ❑ ■

- Sia M il numero di teste ottenuto lanciando N volte una moneta onesta. Allora, per la Legge dei Grandi Numeri, M converge in media quadratica a N/2. *(Suggerimento: valutare valor medio e varianza di M che è una V.C. binomiale)*

  ❑ ■

- Si indichi con S^2 la varianza campionaria (non corretta) delle V.C. i.i.d. X_i , i = 1,…,N $E[X_i] = m$, $Var[X_i] = \sigma^2$. Allora, S^2 è uno stimatore asintoticamente non polarizzato di σ^2. Inoltre, è consistente.

  ■ ❑

- Si consideri il modello $Y=\Phi\theta+V$. Allora, se rango(Φ)=q, dove q è la dimensione del vettore θ, lo stimatore ai minimi quadrati è dato da $\theta^{LS} = (\Phi'\Phi)^{-1}\Phi'Y$.

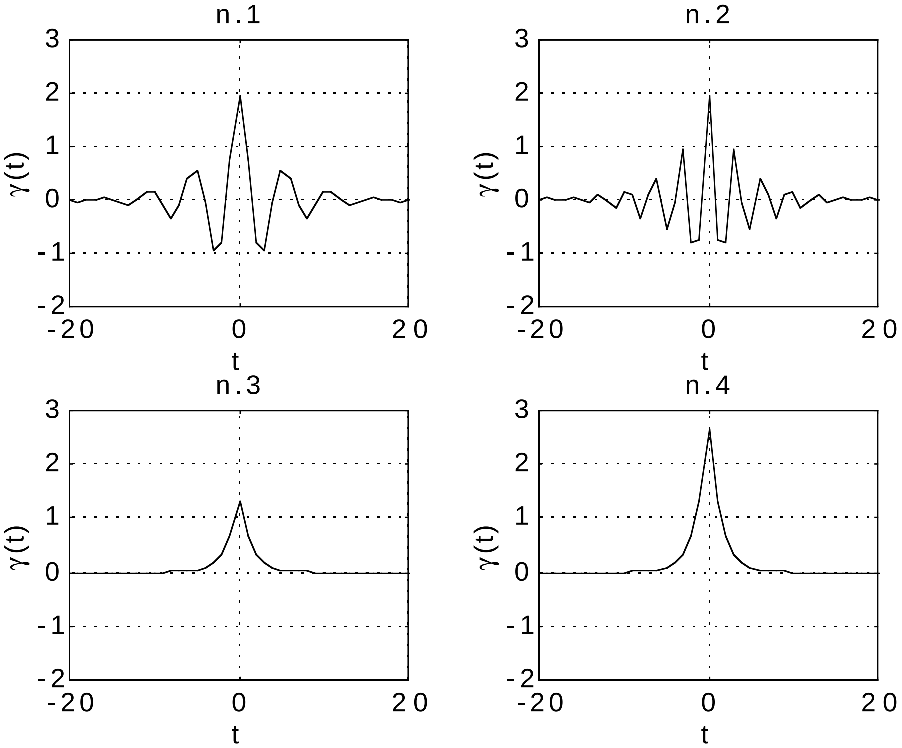
  ■ ❑

- Tra due modelli gerarchici conviene sempre scegliere quello a cui corrisponde la minima somma dei quadrati dei residui relativa ai dati di identificazione.

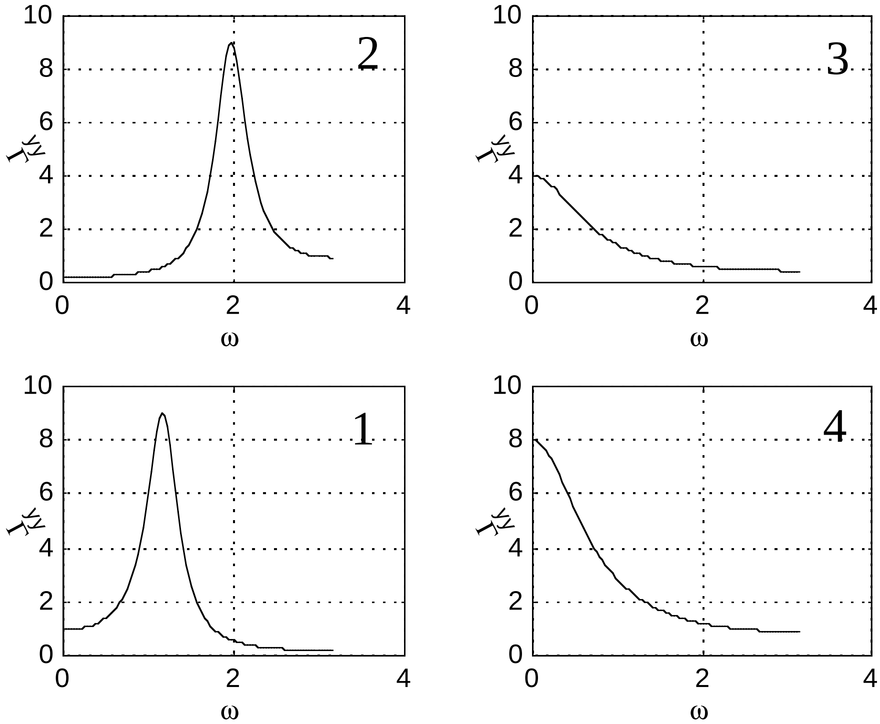
  ❑ ■

Identificazione dei Modelli e Analisi dei Dati (parte II) 16/7/2002

1. Nei seguenti grafici sono riportate le funzioni di autocovarianza di 4 P.C. stazionari



Scrivere sopra il grafico dello spettro il numero della corrispondente funzione di autocovarianza



2. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false:
(Punteggio: risposta esatta = 1, errore = -1, non risponde = 0)

V *F*

- Se un processo casuale stazionario è ergodico allora, per $N \to \infty$, $\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} y(t)^2$ converge in probabilità a $E[y(t)^2]$.

  ■ ❑

- Si supponga di stimare lo spettro di un P.C. stazionario mediante la media di periodogrammi. Se si aumenta il numero di finestre (riducendone pertanto la lunghezza), la polarizzazione della stima aumenta e la varianza diminuisce.

  ■ ❑

- Se $y(t)$ è un processo MA(n) risulta sempre $\gamma_{yy}(\tau) = 0$, $\tau > n$.

  ■ ❑

- Per il processo casuale $y(t) = w(t) + w(t-1)$, $w(t) \sim WN(0,1)$, non è possibile calcolare il predittore ottimo ad un passo.

  ■ ❑

- Il processo casuale $y(t) = w(t) + w(t-1)$, $w(t) \sim WN(0,1)$, è persistentemente eccitante di ogni ordine.

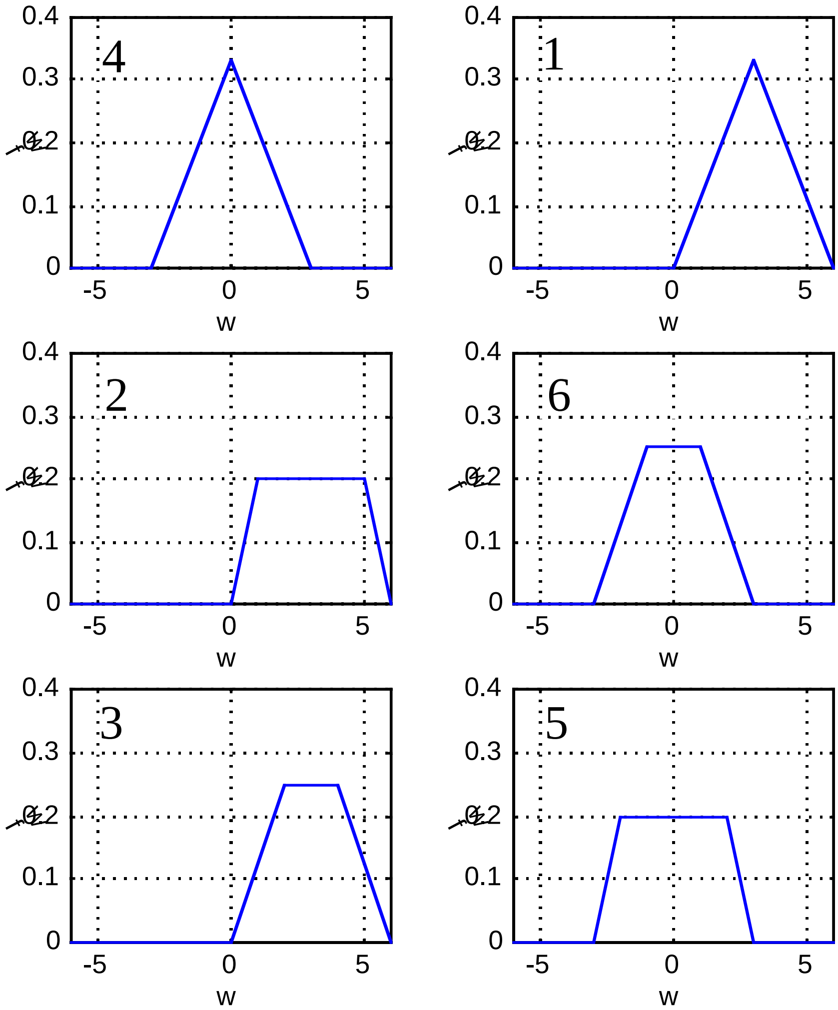
  ■ ❑

Identificazione dei Modelli e Analisi dei Dati (parte I) **18/7/2002**

1. Date due V.C. X e Y indipendenti ed entrambe distribuite in modo uniforme in [0,1], si considerino le seguenti definizioni di W:

1. W= 3X+3Y	2. W= X+5Y	3. W=2X+4Y
4. W= 3X - 3Y	5. W= X+5Y-3	6. X = 2X+4Y-3

Scrivere sopra i grafici delle ddp il numero della scelta corretta



2. La media campionaria delle V.C. i.i.d. X_i , $i = 1,\ldots,N$, $Var[X_i] = \sigma^2$, è risultata essere uguale a 10.

Si considerino le seguenti alternative per i valori di N e σ^2:

1. $N= 36$ $\sigma^2= 1$	2. $N = 100$ $\sigma^2= 1$	3. $N = 36$ $\sigma^2= 4$
4. $N= 100$ $\sigma^2= 4$	5. $N = 36$ $\sigma^2= 9$	6. $N = 100$ $\sigma^2= 9$

Scrivere nei riquadri accanto agli intervalli di confidenza per la media il numero della scelta corretta

$\boxed{2}$ [9.8040,10.196]

$\boxed{6}$ [9.4120,10.588]

$\boxed{3}$ [9.3467,10.653]

$\boxed{1}$ [9.6733,10.327]

$\boxed{4}$ [9.6080,10.392]

$\boxed{5}$ [9.0200,10.980]

3. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false:
(Punteggio: risposta esatta = 1, errore = -1, non risponde = 0)

V *F*

- Risulta sempre $P(A+B) \leq P(A)+P(B)$.

■ ❑

- Lanciando due dadi, la probabilità di ottenere almeno un "6" è pari a 1/3.

❑ ■

- Si considerino delle prove di Bernoulli con $p=q=1/2$; allora, la probabilità di ottenere n successi su n prove è uguale alla probabilità di ottenere 0 successi su n prove.

■ ❑

- La ddp di una V.C. discreta consiste sempre di una sequenza di delta di Dirac.

■ ❑

- Se $Y = aX+b$, allora $E[Y^2] = E[X^2]$.

❑ ■

- In virtù del Teorema del Limite Centrale, la V.C. binomiale (che può essere vista come somma di n V.C. di Bernoulli, indipendenti), al crescere di n, ha una funzione di distribuzione che sia lascia sempre meglio descrivere da una funzione di distribuzione gaussiana.

■ ❑

- Si indichi con S^2 la varianza campionaria (non corretta) delle V.C. i.i.d. X_i , $i = 1,\ldots,N$ $E[X_i] = m$, $Var[X_i] = \sigma^2$. Allora, S^2, pur essendo polarizzato, è uno stimatore consistente di σ^2.

■ ❑

- Si consideri il modello $Y=\Phi\theta+V$. Allora, la matrice varianza di θ^{LS} dipende solo da Var[V] e non da Φ.

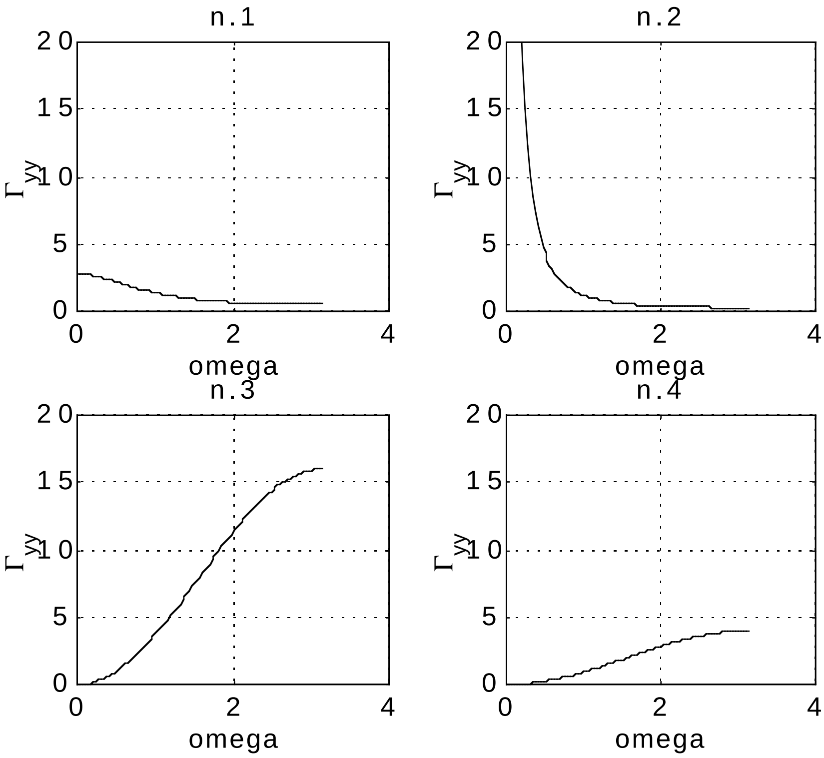
❑ ■

- Data una successione di modelli gerarchici la somma dei quadrati dei residui relativa ai dati di identificazione non cresce mai al crescere del numero di parametri del modello.

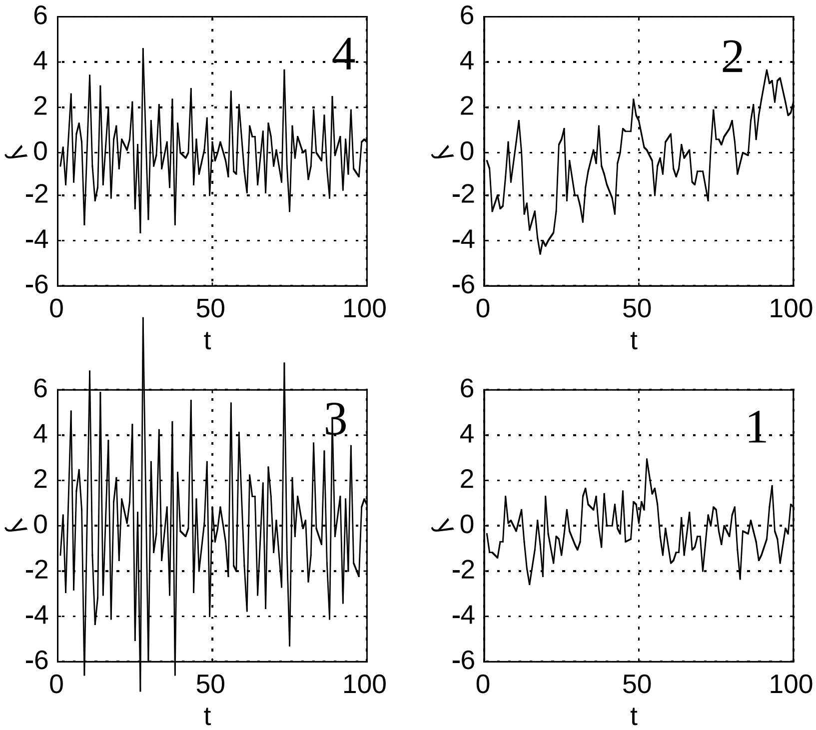
■ ❑

Identificazione dei Modelli e Analisi dei Dati (parte II) **18/7/2002**

1. Nei seguenti grafici sono riportate le densità spettrali di potenza di 4 P.C. stazionari



Scrivere sopra il grafico della realizzazione il numero della corrispondente densità spettrale di potenza.



2. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false:
(Punteggio: risposta esatta = 1, errore = -1, non risponde = 0)

	V	*F*
Il processo casuale $y(t+1)=y(t)+w(t)$, $y(0)=0$, $w(t) \sim WN(0,1)$, non è stazionario nemmeno in senso lato.	■	❑
Dato un P.C. stazionario a spettro razionale, la sua densità spettrale di potenza $\Phi_{yy}(z)$ è la trasfomata Zeta del fattore spettrale canonico..	❑	■
Se $y(t)$ è un processo stazionario di tipo AR(1) la sua autocovarianza non può mai assumere valori negativi.	❑	■
L'autocovarianza della somma di due processi casuali è sempre uguale alla somma delle autocovarianze dei due processi.	❑	■
Se $Y(z)=T(z)X(z)$, dove $T(z)$ è un filtro passatutto ($T(z)=\alpha(z+1/\alpha)/(z+\alpha)$), allora i due P.C. $x(t)$ e $y(t)$ hanno sempre lo stesso spettro.	■	❑

Identificazione dei Modelli e Analisi dei Dati (parte I) 6/9/2002

1. Data una V.C. X con d.d.p. $f_X(x)$ e un numero reale $a \neq 0$, si definisca $Y = aX$.

1.a Ricavare l'espressione di $f_Y(y)$ in funzione di $f_X(x)$.

Data una funzione di V.C. Y = g(X), se l'equazione y = g(x) ammette sempre una sola soluzione x=x(y) nell'incognita x, allora risulta

$$f_Y(y) = \frac{f_X(x(y))}{|g'(x(y))|}$$

Nel nostro caso, g(x) = ax, cosicché y(x) = y/a, g'(x) = a. Quindi,

$$f_Y(y) = \frac{f_X(y/a)}{|a|}$$

1.b Scrivere cosa valgono E[Y] e Var[Y] in funzione di E[X] e Var[X].

$E[Y] = aE[X]$
$Var[Y] = a^2Var[Y]$

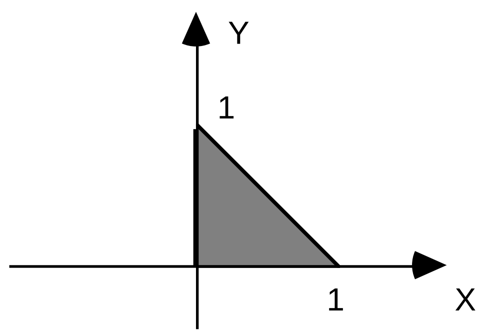
1.c Scrivere l'espressione di $f_Y(y)$ quando X è una V.C. esponenziale con $E[X] = 1/\lambda$.

Per una V.C. esponenziale $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $x \geq 0$, $f_X(x) = 0$, $x < 0$. Pertanto,

$$f_Y(y) = \frac{\lambda e^{-\lambda y/a}}{|a|}, \text{ quando } y/a \geq 0$$

$$f_Y(y) = 0, \text{ altrove}$$

2. Siano X e Y due V.C. che rappresentano le coordinate di un punto scelto in modo equiprobabile nel triangolo disegnato in figura.



2.a Dire, motivando la risposta se X e Y sono incorrelate.

X e Y sono incorrelate se e solo se E[XY] = E[X] E[Y]. Per verificarlo, si calcolano E[X], E[Y], E[XY]. Per definizione di momento del primo ordine di una coppia di V.C.,

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x\, f_{XY}(x,y)\, dy\, dx$$

Dato che lo spazio degli esiti è equiprobabile, nel triangolo $f_{XY}(x,y)$ = 1/(Area Triangolo) = 2, mentre $f_{XY}(x,y)$ = 0 fuori del triangolo. Dunque,

$$E[X] = 2\int_{0}^{1}\int_{0}^{1-x} x\, dy\, dx = \ldots = 1/3$$

Per ragioni di simmetria, E[Y] = E[X] =1/3. Infine,

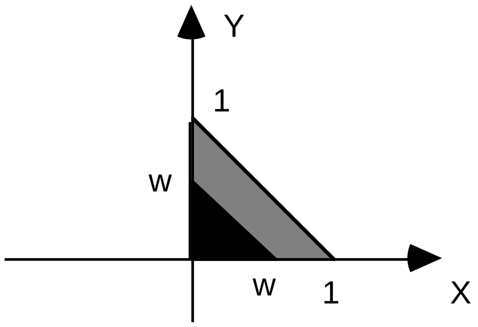
$$E[XY] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy\, f_{XY}(x,y)\, dy\, dx = 2\int_{0}^{1} x \int_{0}^{1-x} y\, dy\, dx = \ldots = 1/12$$

dato che E[XY] ≠ E[X] E[Y], X ed Y non sono incorrelate.

2.b Dire, motivando la risposta se X e Y sono indipendenti.

Se per assurdo, fossero indipendenti, allora dovrebbero essere anche incorrelate, in contraddizione con il risultato del punto precedente.

2.c Ricavare la d.d.p. della V.C. W = X + Y.



$$F_W(w) = P(W \le w) = P(X+Y \le w) =$$
$$= \text{(Area Triangolo piccolo)/(Area Triangolo)} = w^2,\ 0 \le w \le 1$$

$$f_W(w) = \frac{dF_W(w)}{dw} = 2w,\ 0 \le w \le 1$$

$$f_W(w) = \frac{dF_W(w)}{dw} = 0,\ \text{altrove}$$

3. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false:
(Punteggio: risposta esatta = 1, errore = -1, non risponde = 0)

V *F*

- Si considerino delle prove di Bernoulli con probabilità di successo $p = 0.5$; allora la probabilità di ottenere almeno un successo su 4 prove è maggiore di 0.96.

  ☐ ■

- Se X è una V.C. gaussiana, allora $Y = \log(X)$ è una V.C. distribuita in modo lognormale.

  ☐ ■

- Si consideri una V.C. X; $Var[X] = 0$ implica $E[X^2] = 0$.

  ☐ ■

- Essendo X e Y due V.C congiunte, si definiscano $V = 5+X$, $W = 6+Y$; allora, $Cov[V,W] = Cov[X,Y]$.

  ■ ☐

- Date due V.C. congiunte X e Y, $E[X^2+Y] = E[X^2]+E[Y]$.

  ■ ☐

- Se le V.C. congiunte X e Y sono indipendenti, allora $E[X^2Y] = E[X^2]E[Y]$.

  ■ ☐

- Se $Y = \Phi\theta+V$, con $E[V] = 0$, e $Var[V] = \sigma^2 I$, allora la stima BLUE (Best Linear Unbiased Estimator) di θ non dipende da σ^2.

  ■ ☐

- Si consideri il modello $y_k=\theta x_k+v_k$, $k=1,\dots,N$, dove x_k sono noti e v_k sono errori di misura. Allora $\theta^{LS}=\sum_{k=1}^{N} y_k x_k / \sum_{k=1}^{N} y_k^2$.

  ☐ ■

- Nella stima BLUE, quando $Var[V] = \sigma^2 I$, una stima non polarizzata di σ^2 è data da $SSR/(N-q)$, dove q è il numero di parametri del modello.

  ■ ☐

- Si consideri la media campionaria delle V.C. i.i.d. X_i , $i = 1,\dots,N$ $E[X_i] = m$, $Var[X_i] =1$. Allora l'intervallo di confidenza al 95% per m è $I_{0.95} = [M_1-1.96\sqrt{N}, M_1+1.96\sqrt{N}]$.

  ☐ ■

Identificazione dei Modelli e Analisi dei Dati (parte II) 6/9/2002

1. Sia

$$y(t) = a_2\, y(t-2) + w(t) \ , \quad w(\cdot) \sim WGN(0,1)$$

1.a Si dica per quali valori di a_2 il modello rappresenta un processo $y(\cdot)$ stazionario.
Si tratta di un processo AR(2), la cui funzione di trasferimento è

$$G(z) = \frac{1}{1 - a_2 z^{-2}} = \frac{z^2}{z^2 - a_2}$$

Il modello corrisponde ad un processo stazionario se le radici del denominatore (i poli) hanno modulo minore di uno, cioé se $|a_2| < 1$.

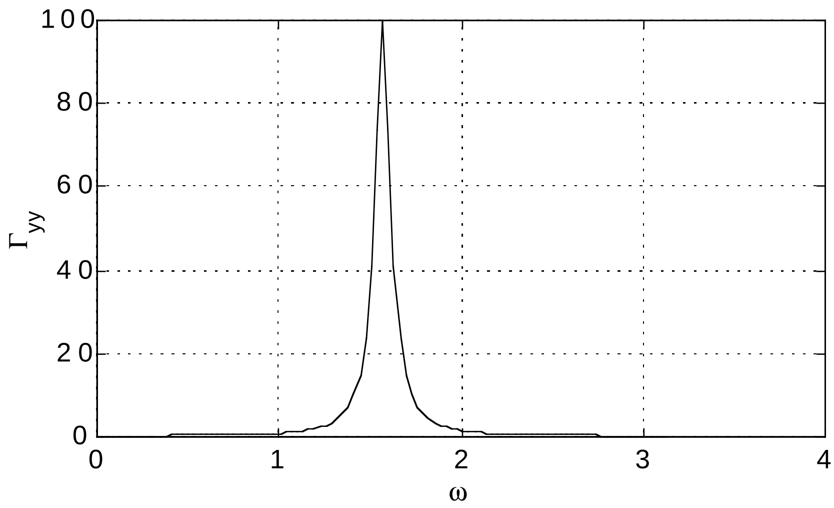
1.b Si calcolino: $\gamma_{yy}(0)$, $\gamma_{yy}(1)$, $\gamma_{yy}(2)$.
A partire dal modello si ottengono le seguenti relazioni (ipotizzo $|a_2| < 1$).

$$Var[y(t)] = a_2^2 Var[y(t-2)] + Var[w(t)] \Rightarrow Var[y(t)] = \frac{1}{1 - a_2^2}$$

$$\gamma_{yy}(1) = Cov[y(t),y(t-1)] = Cov[a_2\, y(t-2) + w(t),y(t-1)] = a_2\, \gamma_{yy}(1) \Rightarrow \gamma_{yy}(1) = 0$$

$$\gamma_{yy}(2) = Cov[y(t),y(t-2)] = Cov[a_2\, y(t-2) + w(t),y(t-2)] = a_2\, Var[y(t-2)] \Rightarrow \gamma_{yy}(2) = \frac{a_2}{1 - a_2^2}$$

1.c In corrispondenza di $a_2 = -0.9$. Si tracci l'andamento qualitativo dello spettro del processo $y(\cdot)$.
Per $a_2 = -0.9$, si hanno due poli immaginari puri in $\pm j\sqrt{0.9}$ a cui corrispondono due picchi nello spettro posizionati in $\omega = \pm\pi/2$.



2. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false:
(Punteggio: risposta esatta = 1, errore = -1, non risponde = 0)

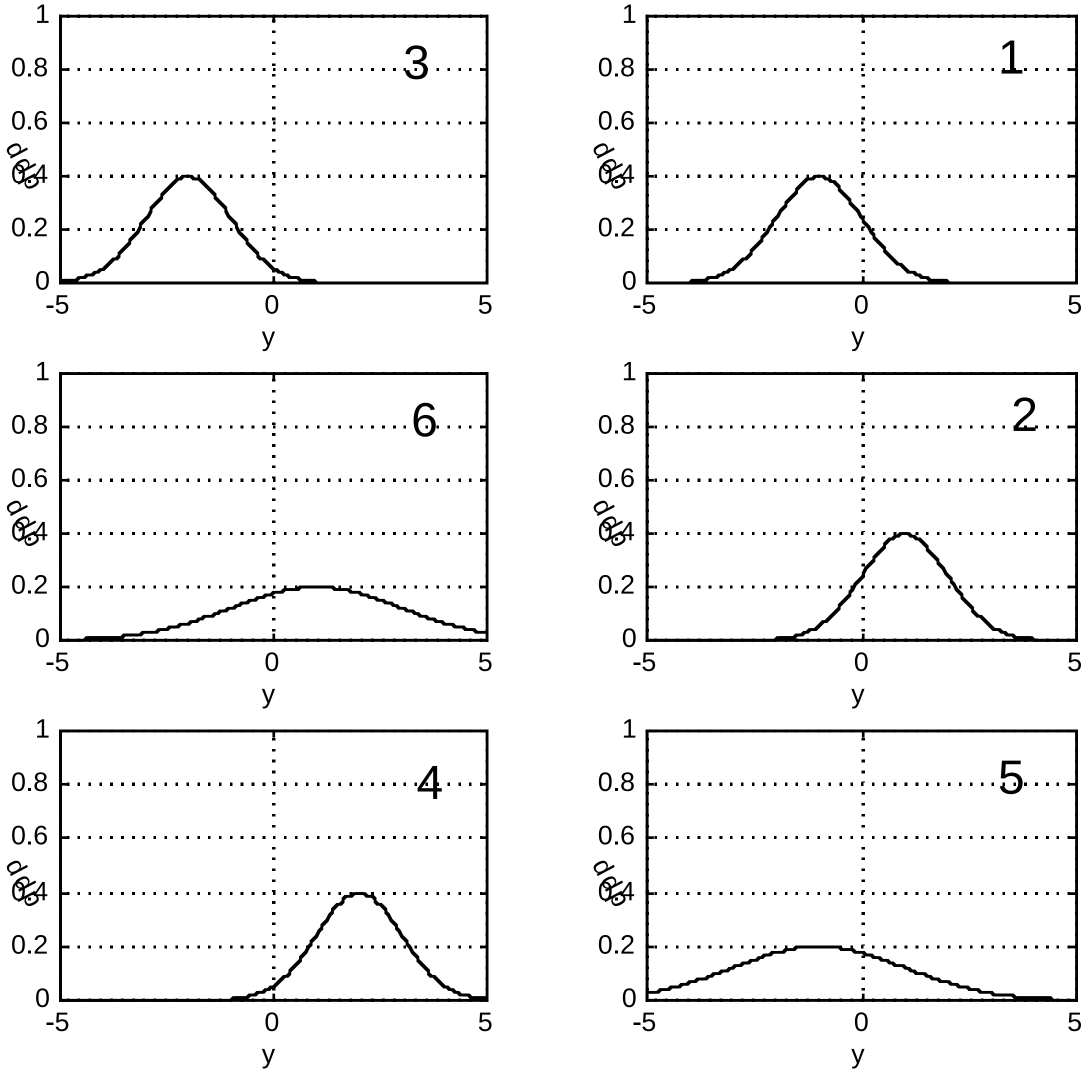
	V	*F*
• Un processo MA è stazionario se e solo se la sua funzione di trasferimento ha tutti gli zeri strettamente interni al cerchio di raggio unitario.	❑	■
• La densità spettrale di potenza $\Phi_{yy}(z)$ di un P.C. stazionario a spettro razionale y(t) è sempre un rapporto di polinomi.	■	❑
• Se y(t) è un processo stazionario di tipo AR(1) con $a_1 > 0$, risulta sempre $\gamma_{yy}(\tau) > 0, \forall\tau$.	■	❑
• La densità spettrale di potenza della somma di due processi casuali è sempre uguale alla somma delle densità spettrali di potenza dei due processi.	❑	■
• Lo scalino discreto ($u(t)=0,\ t<0,\ u(t)=1,\ t\geq 0$) è persistentemente eccitante di ordine 1.	■	❑

Identificazione dei Modelli e Analisi dei Dati (parte I) 27/9/2002

1. Sia $Y = \alpha Z + \beta$, dove $Z \sim N(0,1)$. Si considerino le seguenti scelte per i parametri α e β:

1) $\alpha = -1$,	$\beta = -1$	2) $\alpha = 1$,	$\beta = 1$
3) $\alpha = -1$,	$\beta = -2$	4) $\alpha = 1$,	$\beta = 2$
5) $\alpha = 2$,	$\beta = -1$	6) $\alpha = -2$,	$\beta = 1$

Riportare sopra i seguenti grafici delle densità di probabilità di Y il numero della corrispondente coppia α,β



2. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false:
(Punteggio: risposta esatta = 1, errore = -1, non risponde = 0)

	V	*F*
• Se $P(B) \neq 0$, risulta sempre $P(AB) = P(A\,|\,B)P(A)$.	❑	■
• Dati due eventi A e B, non può mai accadere che $P(A)P(B) > 1$.	■	❑
• La probabilità che il tempo di attesa tra due eventi di Poisson sia minore o uguale a T è pari a $1\text{-}\exp(-\lambda T)$.	■	❑
• Se $Var[X] = 0$, allora ne segue che $E[X^2] = 0$.	❑	■
• Se $Z=X+Y$ con $Y=2X$, allora $f_Z(z) = f_X(z/3)/3$.	■	❑
• Date delle V.C. i.i.d. X_i , $i = 1,\ldots,N$, $E[X_i] = m$, $Var[X_i] =\sigma^2$, la media campionaria è uno stimatore non polarizzato e consistente di m.	■	❑
• Date due V.C. congiunte X e Y, la ddp della V.C. $Z = X+Y$ è la convoluzione della ddp di X e della ddp di Y.	❑	■
• Uno stimatore polarizzato non può essere consistente.	❑	■
• Sia $Y = \Phi\theta+V$, con $E[V] = 0$, e $Var[V] = \sigma^2 I$. Allora, $Var[\theta^{LS}] = \sigma^2\Phi'\Phi$.	❑	■
• Se $Y = \Phi\theta+V$, con V distribuito gaussianamente, allora θ^{LS} è gaussiano.	■	❑

3. Si considerino i seguenti dati:

$y_1 = 1$, $y_2 = 0$, $y_3 = -2$

$t_1 = -1$, $t_2 = 0$, $t_3 = 1$

Vi sono due modelli possibili:

(a) $y_k = \theta + v_k$

(b) $y_k = \theta_1 t_k + \theta_2 t_k^2 + v_k$

dove v_k indica un errore di misura. Gli errori di misura sono V.C. i.i.d. ($Var[V] = \sigma^2 I$).

3.a Supponendo che il modello (a) sia quello giusto calcolare la stima LS di θ.

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\theta}^{LS} = (\boldsymbol{\Phi}'\boldsymbol{\Phi})^{-1}\boldsymbol{\Phi}'\mathbf{Y} = -1/3$$

3.b Supponendo che il modello (b) sia quello giusto, calcolare la stima LS di θ.

$$\boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix} t_1 & t_1^2 \\ t_2 & t_2^2 \\ t_3 & t_3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\theta}^{LS} = (\boldsymbol{\Phi}'\boldsymbol{\Phi})^{-1}\boldsymbol{\Phi}'\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3/2 \\ -1/2 \end{bmatrix}$$

3.c Dire, motivando la risposta, se si può usare il criterio FPE = SSR (N+q)/(N-q) per scegliere il modello migliore. In caso affermativo, trovare il modello migliore.

Non si può usare FPE perché i due modelli non sono gerarchici (il modello (a) non è un caso particolare di (b)).

Identificazione dei Modelli e Analisi dei Dati (parte II) 27/9/2002

1. Sia

$y(t) = 0.6\ y(t-1) + w(t) + 4w(t-1)\ ,\quad w(\cdot) \sim WGN(0,1)$

1.a Dire perché y(t) converge ad un processo stazionario e determinare il valore atteso di tale processo.

$$G(z) = \frac{1 + 4z^{-1}}{1 - 0.6^{-1}} = \frac{z + 4}{z - 0.6}$$

Dato che il polo in z = 0.6 ha modulo < 1, allora y(t) converge and un processo stazionario.
$E[y(t)] = G(1)\ E[w(t)] = 12.5 \times 0 = 0$

1.b Ricavare il predittore ottimo ad un passo.

G(z) non è canonica.

$$T(z) = 4\frac{z + 1/4}{z + 4},\ G(z)T(z) = 4\frac{z + 1/4}{z - 0.6}\ ,\ \text{non canonico}$$

$$\hat{G}(z) = \frac{z + 1/4}{z - 0.6} = \frac{C(z)}{A(z)},\ \hat{\sigma}^2 = 16$$

$$C(z)\ \hat{Y}(z) = [C(z) - A(z)]Y(z)$$

$$\hat{y}(t\,|\,t\text{-}1) + 0.25\hat{y}(t\text{-}1\,|\,t\text{-}2) = 0.85y(t\text{-}1)$$

$$\hat{y}(t\,|\,t\text{-}1) = -\ 0.25\hat{y}(t\text{-}1\,|\,t\text{-}2) + 0.85y(t\text{-}1)$$

1.c Ricavare il valore atteso del processo stazionario y(t) nel caso in cui $w(\cdot) \sim WGN(1,1)$.

$E[y(t)] = G(1)\ E[w(t)] = 12.5 \times 1 = 12.5$

2. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false:
(Punteggio: risposta esatta = 1, errore = -1, non risponde = 0)

	V	F
• In una rete neurale di tipo MLP(Multi Layer Perceptron) il numero dei parametri da stimare coincide con il numero di neuroni.	❑	■
• Dato un P.C. stazionario x(t), se y(t) := x(t)+x(t-1), allora risulta sempre Var[y(t)]=2Var[x(t)]	❑	■
• Se y(t) :=v(t)+v(t-1), v(t)~WN, allora risulta sempre Var[y(t)] = 2Var[v(t)].	■	❑
• Il periodogramma è uno stimatore asintoticamente non polarizzato.	■	❑
• Un rumore bianco è persistentemente eccitante di qualsiasi ordine.	■	❑

Identificazione dei Modelli e Analisi dei Dati (parte I) 8/11/2002

1. Si consideri una roulette senza lo zero. Un giocatore possiede 7 fiches ed adotta la seguente strategia. Punta una fiche sul rosso e, se vince, si ritira con una vincita V pari ad uno. Se invece esce il nero, al lancio successivo punta due fiches sul rosso. Se esce il rosso si ritira, altrimenti punta le sue ultime 4 fiches sul rosso. Con V indichiamo il guadagno del giocatore quando esce dal casinò (si noti che vi sono solo due possibilità: V=1 oppure V=-7). Ricavare E[V].

$P(V= -7) = P(N,N,N) = P(N)^3 = 0.5^3 = 1/8$

$P(V = 1) = 1 - P(V= -7) = 7/8$

Dato che V è una V.C. discreta:

$E[V] = -7 \times P(V= -7) + 1 \times P(V= 1) = -7/8 + 7/8 = 0$

2. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false:
(Punteggio: risposta esatta = 1, errore = -1, non risponde = 0)

	V	*F*
La probabilità che, lanciando n volte una moneta onesta, esca Testa una sola volta è pari a $n(1/2)^n$.	■	❑
Dato un dado onesto, si considerino gli eventi A={dado≥2}, B={dado pari}. Allora, A e B sono indipendenti.	❑	■
Si consideri la media campionaria di N V.C. i.i.d.. Allora, se quadruplico N, la varianza della media campionaria si dimezza.	❑	■
Date X e Y congiuntamente gaussiane e i.i.d., si definiscano V=X+Y, W=X-Y. Allora, V e W sono tra di loro indipendenti.	■	❑
Sia $Y = \Phi\theta+V$, con $E[V] = 0$, e $Var[V] = \sigma^2 I$. Allora, θ^{LS} non dipende da σ^2.	■	❑

Identificazione dei Modelli e Analisi dei Dati (parte II) 8/11/2002

1. Si consideri l'identificazione del modello

$$y(t) = ay(t-1) + w(t)\ , \quad w(\cdot) \sim WGN(0,\sigma^2)$$

a partire dai dati y(1), y(2), …, y(N).
Ricavare l'espressione della stima ai minimi quadrati di a.

Ponendo $\theta = a$, risulta $Y = \Phi\theta + W$, dove

$Y = [y(2)\ y(3)\ \dots\ y(N)]'$
$W = [w(2)\ w(3)\ \dots\ w(N)]'$
$\Phi = [y(1)\ y(2)\ \dots\ y(N-1)]'$

Ricordando che $\theta^{LS} = (\Phi'\Phi)^{-1}\Phi'Y$, si ottiene

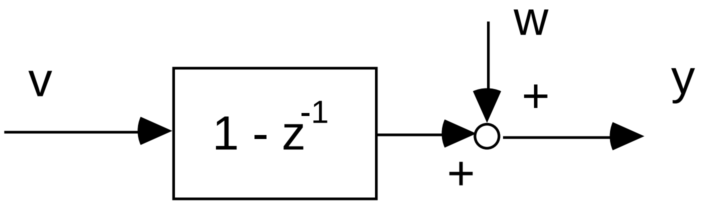
$$\theta^{LS} = \frac{\sum_{t=2}^{N} y(t)y(t-1)}{\sum_{t=1}^{N-1} y(t)^2}$$

2. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false:
(Punteggio: risposta esatta = 1, errore = -1, non risponde = 0)

	V	*F*
• Se Cov[y(t),y(t+L)] ≠ Cov[y(t-L),y(t)], allora y non può essere un P.C. stazionario.	■	❑
• Dato un P.C. stazionario x(t), se y(t) := x(t-k), allora x ed y hanno lo stesso spettro.	■	❑
• La densità spettrale di potenza $\Gamma_{yy}(\omega)$ di un P.C. stazionario di tipo AR non può mai annullarsi.	■	❑
• Due P.C. stazionari hanno lo stesso fattore spettrale canonico se e solo se hanno la stessa funzione di autocovarianza.	■	❑
• Il problema dell'identificazione dei parametri di un modello ARMAX comporta un problema di stima non lineare nei parametri.	■	❑

Identificazione dei Modelli e Analisi dei Dati (parte II) 19/12/2002

1. Si consideri il seguente schema a blocchi in cui v ~ WN(0,1), w ~ WN(0,1), con v e w indipendenti tra di loro.



1.a Calcolare $\Gamma_{yy}(\omega)$.

$\Phi_{yy}(z) = (1 - z^{-1})(1 - z) + 1 = 3 - z - z^{-1}$

$\Gamma_{yy}(\omega) = \Phi_{yy}(e^{j\omega}) = 3 - e^{j\omega} - e^{-j\omega} = 3 - 2\cos\omega$

1.b Calcolare Var[y(t)].

$X(z) := (1 - z^{-1}))V(z)$

$Var[y(t)] = Var[x(t)] + Var[w(t)] = 2 + 1 = 3$

2. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false:
(Punteggio: risposta esatta = 1, errore = -1, non risponde = 0)

	V	*F*
• Sia w ~ WN(0,1); allora y(t) = sin(t) w(t) non è un P.C. stazionario.	■	❑
• Dato un P.C. stazionario u(t), si consideri $y(t) = g_0\, u(t) + g_1\, u(t-1) + \ldots + g_n\, u(t-n)$. Allora, $E[y(t)] = (g_0 + g_1 + \ldots + g_n)E[u(t)]$.	■	❑
• Sia $y(t) = a_2 y(t-2) + w(t)$, $\lvert a_2 \rvert < 1$, w ~ WN(0,1). Allora, $y(t \mid t-1) = a_2 y(t-2)$.	■	❑
• Dato un processo stazionario di tipo AR(1), risulta $\lim_{N\to\infty} a_1^{LS} = \gamma_{yy}(0)/\gamma_{yy}(1)$.	❑	■
• Dato un P.C. stazionario x(t), si consideri y(t) = x(t) - xt-1). Allora, $\gamma_{yy}(\tau) = 0, \forall\tau$.	❑	■