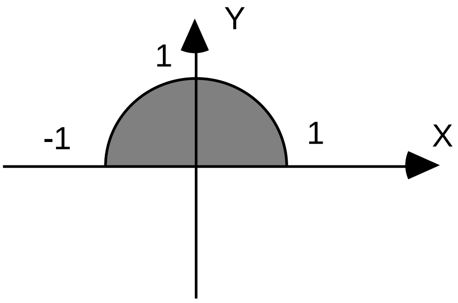
Identificazione dei Modelli e Analisi dei Dati MN (parte I) 3/7/2003

1. Si considerino le due V.C. X e Y, coordinate di un punto scelto in modo equiprobabile nella regione tratteggiata.



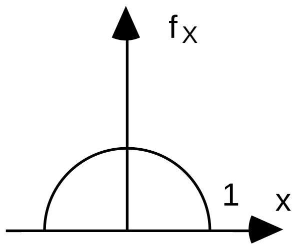
1.a Ricavare e tracciare il grafico di $f_X(x)$ e $f_Y(y)$.

Dato che lo spazio degli esiti è equiprobabile,

$f_{XY}(x,y) = 1/(\text{Area del semicerchio}) = 1/(\pi/2) = 2/\pi$, nel semicerchio
$f_{XY}(x,y) = 0$, altrove

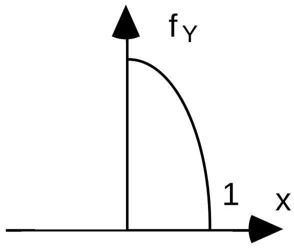
$$f_X(x) = \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{2}{\pi}\, dy = \frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2},\ -1 \le x \le 1$$

$f_X(x) = 0$, altrove



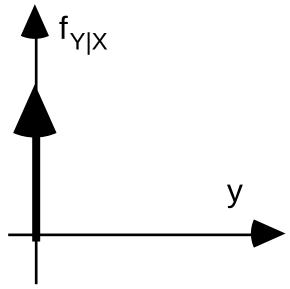
$$f_Y(y) = \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \frac{2}{\pi}\, dx = \frac{4}{\pi}\sqrt{1-y^2},\ 0 \le y \le 1$$

$f_Y(y) = 0$, altrove



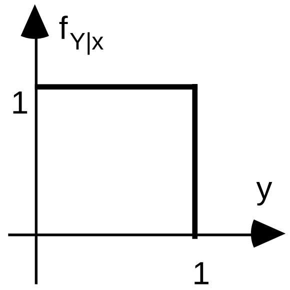
1.b Ricavare e tracciare il grafico di $f_{Y|X}(y|X=0)$ e $f_{Y|X}(y|X=1)$.

$$\mathbf{f_{Y|X}(y|X=1) = \frac{f_{XY}(1,y)}{f_X(1)} = \delta(y)}$$



$$\mathbf{f_{Y|X}(y|X=0) = \frac{f_{XY}(0,y)}{f_X(0)} = 1,\ 0 \le y \le 1}$$

$\mathbf{f_{X|Y}(y|X=0) = 0}$**, altrove**



1.c Dire, motivando la risposta, se X e Y sono indipendenti.

No, perchè $f_{Y|X}(y|X=x)$ dipende da x.

2. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false:
(Punteggio: risposta esatta = 1, errore = -1, non risponde = 0)

	V	*F*
• Se P(A+B)≠P(A)+P(B), i due eventi A e B non sono disgiunti.	■	❑
• Se P(B)≠0, risulta sempre P(AB) = P(A|B)P(B).	■	❑
• Giocando con una coppia di dadi, la probabilità di ottenere almeno un "6" è inferiore a 1/3.	■	❑
• Sia $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$. Allora, $Var[\alpha X+\beta Y] = \alpha^2 Var[X]+\beta^2 Var[Y]$ se e solo se X ed Y sono incorrelate.	■	❑
• Se X=1-Y, allora $f_X(x) = f_Y(1-x)$.	■	❑

Identificazione dei Modelli e Analisi dei Dati MN (parte II) 3/7/2003

1A

1A. Dare la definizione di convergenza in distribuzione.

1A. Enunciare il Teorema Centrale del Limite per V.C. i.i.d.

1B.

1B.a Enunciare la Legge dei Grandi Numeri in forma forte (convergenza quasi certa) per V.C. i.i.d.

1B.b Dimostrare la Legge de Grandi Numeri, relativamente alla convergenza in media quadratica.

1C. Si considderi la varianza campionaria S^2 delle V.C. i.i.d. X_i , $i = 1,\dots,N$, $Var[X_i] = \sigma^2$.

1C.a Ricavare $E[S^2]$.

1C.b Dire, motivando la risposta, se S^2 è uno stimatore non polarizzato.

1D. Si consideri uno stimatore $\hat{\theta}$ del parametro $\theta°$ e si definisca BIAS := $E[\hat{\theta} - \theta°]$.

Dimostrare che

MSE := $\text{BIAS}^2 + \text{Var}[\hat{\theta}]$.

2A. La media campionaria delle V.C. i.i.d. X_i , $i = 1,\ldots,N$, $Var[X_i] = \sigma^2$, è risultata essere uguale a 10.

Si considerino le seguenti alternative per i valori di N e σ^2:

1. $N= 25$, $\sigma^2= 1$	2. $N = 100$, $\sigma^2= 1$	3. $N =25$, $\sigma^2= 9$
4. $N= 100$, $\sigma^2= 9$	5. $N = 25$, $\sigma^2= 16$	6. $N = 100$, $\sigma^2= 16$

Scrivere nei riquadri accanto agli intervalli di confidenza per la media il numero della scelta corretta

1 [9.6080 10.3920]	3 [8.8240 11.1760]
6 [9.2160 10.7840]	2 [9.8040 10.1960]
5 [8.4320 11.5680]	4 [9.4120 10.5880]

2B. La media campionaria delle V.C. i.i.d. X_i , $i = 1,\ldots,N$, $Var[X_i] = \sigma^2$, è risultata essere uguale a 15.

Si considerino le seguenti alternative per i valori di N e σ^2:

1. $N= 25$, $\sigma^2= 1$
2. $N = 100$, $\sigma^2= 1$
3. $N =25$, $\sigma^2= 9$
4. $N= 100$, $\sigma^2= 9$
5. $N = 25$, $\sigma^2= 16$
6. $N = 100$, $\sigma^2= 16$

Scrivere nei riquadri accanto agli intervalli di confidenza per la media il numero della scelta corretta

$\boxed{1}$ [14.6080 15.3920]

$\boxed{6}$ [14.2160 15.7840]

$\boxed{3}$ [13.8240 16.1760]

$\boxed{5}$ [13.4320 16.5680]

$\boxed{2}$ [14.8040 15.1960]

$\boxed{4}$ [14.4120 15.5880]

2C. La media campionaria delle V.C. i.i.d. X_i , $i = 1,\ldots,N$, $Var[X_i] = \sigma^2$, è risultata essere uguale a -10.

Si considerino le seguenti alternative per i valori di N e σ^2:

1. $N= 25$, $\sigma^2= 1$
2. $N = 100$, $\sigma^2= 1$
3. $N =25$, $\sigma^2= 9$
4. $N= 100$, $\sigma^2= 9$
5. $N = 25$, $\sigma^2= 16$
6. $N = 100$, $\sigma^2= 16$

Scrivere nei riquadri accanto agli intervalli di confidenza per la media il numero della scelta corretta

$\boxed{6}$ [-10.7840 -9.2160]	$\boxed{3}$ [-11.1760 -8.8240]
$\boxed{2}$ [-10.1960 -9.8040]	$\boxed{4}$ [-10.5880 -9.4120]
$\boxed{5}$ [-11.5680 -8.4320]	$\boxed{1}$ [-10.3920 -9.6080]

2D. La media campionaria delle V.C. i.i.d. X_i , $i = 1,\ldots,N$, $Var[X_i] = \sigma^2$, è risultata essere uguale a -20.

Si considerino le seguenti alternative per i valori di N e σ^2:

1. $N = 25$, $\sigma^2 = 1$	2. $N = 100$, $\sigma^2 = 1$	3. $N = 25$, $\sigma^2 = 9$
4. $N = 100$, $\sigma^2 = 9$	5. $N = 25$, $\sigma^2 = 16$	6. $N = 100$, $\sigma^2 = 16$

Scrivere nei riquadri accanto agli intervalli di confidenza per la media il numero della scelta corretta

$\boxed{2}$ [-20.1960 -19.8040]	$\boxed{6}$ [-20.7840 -19.2160]
$\boxed{4}$ [-20.5880 -19.4120]	$\boxed{1}$ [-20.3920 -19.6080]
$\boxed{5}$ [-21.5680 -18.4320]	$\boxed{3}$ [-21.1760 -18.8240]

3A. Si considerino i seguenti dati:

$y_1 = 3$ $y_2 = -2$ $y_3 = 0.5$
$t_1 = 0$ $t_2 = 3$ $t_3 = -3$

Vengono presi in considerazione i seguenti modelli:

1) $y_k = \theta_1 \sin(\pi t_k/2) + \theta_2 \cos(\pi t_k/2) + v_k$
2) $y_k = \theta_1 + \theta_2\, t_k + v_k$
3) $y_k = \theta_1 + \theta_2\, t_k^2 + v_k$
4) $y_k = \theta_1 t_k + \theta_2\, t_k^2 + v_k$

dove v_k sono errori di misura tra loro incorrelati con $E[v_k] = 0$, $Var[v_k] = 1$.

Si supponga di calcolare la stima del vettore θ dei parametri mediante lo stimatore di Gauss-Markov. Di seguito sono riportate le inverse delle matrici di covarianza dei parametri stimati per tutti e quattro i casi. Scrivere nelle caselle accanto alle matrici il numero del modello corrispondente.

$\boxed{4}$ $(Var[\theta^M])^{-1} = \begin{bmatrix} 18 & 0 \\ 0 & 162 \end{bmatrix}$

$\boxed{3}$ $(Var[\theta^M])^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 18 \\ 18 & 162 \end{bmatrix}$

$\boxed{2}$ $(Var[\theta^M])^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 18 \end{bmatrix}$

$\boxed{1}$ $(Var[\theta^M])^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

3B. Si considerino i seguenti dati:

$y_1 = 3$ $\quad$ $y_2 = -2$ $\quad$ $y_3 = 0.5$
$t_1 = 0$ $\quad$ $t_2 = 1$ $\quad$ $t_3 = -1$

Vengono presi in considerazione i seguenti modelli:

1) $y_k = \theta_1 \sin(\pi t_k/2) + \theta_2 \cos(\pi t_k/2) + v_k$
2) $y_k = \theta_1 + \theta_2\, t_k + v_k$
3) $y_k = \theta_1 + \theta_2\, t_k^2 + v_k$
4) $y_k = \theta_1 t_k + \theta_2\, t_k^2 + v_k$

dove v_k sono errori di misura tra loro incorrelati con $E[v_k] = 0$, $Var[v_k] = 1$.

Si supponga di calcolare la stima del vettore θ dei parametri mediante lo stimatore di Gauss-Markov. Di seguito sono riportate le inverse delle matrici di covarianza dei parametri stimati per tutti e quattro i casi. Scrivere nelle caselle accanto alle matrici il numero del modello corrispondente.

$\boxed{4}$ $\quad (Var[\theta^M])^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

$\boxed{1}$ $\quad (Var[\theta^M])^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\boxed{2}$ $\quad (Var[\theta^M])^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

$\boxed{3}$ $\quad (Var[\theta^M])^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

3C. Si considerino i seguenti dati:

$y_1 = 3$ $y_2 = -2$ $y_3 = 0.5$
$t_1 = 0$ $t_2 = -1$ $t_3 = 3$

Vengono presi in considerazione i seguenti modelli:

1) $y_k = \theta_1 \sin(\pi t_k/2) + \theta_2 \cos(\pi t_k/2) + v_k$
2) $y_k = \theta_1 + \theta_2 t_k + v_k$
3) $y_k = \theta_1 + \theta_2 t_k^2 + v_k$
4) $y_k = \theta_1 t_k + \theta_2 t_k^2 + v_k$

dove v_k sono errori di misura tra loro incorrelati con $E[v_k] = 0$, $Var[v_k] = 1$.

Si supponga di calcolare la stima del vettore θ dei parametri mediante lo stimatore di Gauss-Markov. Di seguito sono riportate le inverse delle matrici di covarianza dei parametri stimati per tutti e quattro i casi. Scrivere nelle caselle accanto alle matrici il numero del modello corrispondente.

$\boxed{3}$ $(Var[\theta^M])^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 10 \\ 10 & 82 \end{bmatrix}$

$\boxed{2}$ $(Var[\theta^M])^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 10 \end{bmatrix}$

$\boxed{4}$ $(Var[\theta^M])^{-1} = \begin{bmatrix} 10 & 26 \\ 26 & 82 \end{bmatrix}$

$\boxed{1}$ $(Var[\theta^M])^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

3D. Si considerino i seguenti dati:

$y_1 = 3$ $y_2 = -2$ $y_3 = 0.5$
$t_1 = 0$ $t_2 = -1$ $t_3 = -3$

Vengono presi in considerazione i seguenti modelli:

1) $y_k = \theta_1 \sin(\pi t_k/2) + \theta_2 \cos(\pi t_k/2) + v_k$
2) $y_k = \theta_1 + \theta_2\, t_k + v_k$
3) $y_k = \theta_1 + \theta_2\, t_k^2 + v_k$
4) $y_k = \theta_1 t_k + \theta_2\, t_k^2 + v_k$

dove v_k sono errori di misura tra loro incorrelati con $E[v_k] = 0$, $\mathrm{Var}[v_k] = 1$.

Si supponga di calcolare la stima del vettore θ dei parametri mediante lo stimatore di Gauss-Markov. Di seguito sono riportate le inverse delle matrici di covarianza dei parametri stimati per tutti e quattro i casi. Scrivere nelle caselle accanto alle matrici il numero del modello corrispondente.

$\boxed{2}$ $(\mathrm{Var}[\theta^M])^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 10 \end{bmatrix}$

$\boxed{1}$ $(\mathrm{Var}[\theta^M])^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\boxed{4}$ $(\mathrm{Var}[\theta^M])^{-1} = \begin{bmatrix} 10 & -28 \\ -28 & 82 \end{bmatrix}$

$\boxed{3}$ $(\mathrm{Var}[\theta^M])^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 10 \\ 10 & 82 \end{bmatrix}$

4A. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false:
(Punteggio: risposta esatta = 1, errore = -1, non risponde = 0)

	V	F
• Per applicare il Test F non è necessario ipotizzare che la ddp dei dati Y sia congiuntamente gaussiana.	☐	■
• Se una successione di V.C. converge in probabilità, allora converge anche in distribuzione.	■	☐
• La media campionaria delle V.C. i.i.d. X_i , $i = 1,\ldots,N$, $E[X_i] = m$, $Var[X_i] = \sigma^2$, è asintoticamente normale.	■	☐
• Uno stimatore $\hat{\theta}$ si dice non polarizzato se $E[\hat{\theta} - \theta°] = 0$, dove $\theta°$ indica il valore vero del parametro da stimare.	■	☐
• Si consideri la media campionaria delle V.C. i.i.d. X_i , $i = 1,\ldots,N$ $E[X_i] = m$, $Var[X_i]$ ignota. Allora l'intervallo di confidenza al 95% per m è $I_{0.95} = [M_1-1.96S_c/\sqrt{N}, M_1+1.96S_c/\sqrt{N}]$.	☐	■
• Date due V.C. X ed Y congiuntamente gaussiane, risulta che $E[X \mid Y=y]$ dipende linearmente da y.	■	☐
• Nella stima ai minimi quadrati, se $N > q$, risulta sempre $\det(\Phi'\Phi) \neq 0$.	☐	■
• $E[\chi^2_N] = N$.	■	☐
• Tra due stimatori non polarizzati, a parità di altre condizioni, è preferibile quello che ha la varianza più piccola.	■	☐
• La media campionaria delle V.C. i.i.d. X_i , $i = 1,\ldots,N$, $E[X_i] = m$, $Var[X_i] = \sigma^2$, converge quasi certamente a m.	■	☐

4B. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false:
(Punteggio: risposta esatta = 1, errore = -1, non risponde = 0)

	V	F
Per applicare il Test F è necessario ipotizzare che la ddp dei dati Y sia congiuntamente gaussiana.	■	❑
Se una successione di V.C. converge in distribuzione, allora converge anche in media quadratica.	❑	■
La media campionaria delle V.C. i.i.d. X_i , $i = 1,\dots,N$, $E[X_i] = m$, $Var[X_i] = \sigma^2$, tende asintoticamente ad una gaussiana standard.	❑	■
Uno stimatore $\hat{\theta}$ si dice non polarizzato se $E[(\hat{\theta} - \theta°)^2] = 0$, dove $\theta°$ indica il valore vero del parametro da stimare.	❑	■
Si consideri la media campionaria delle V.C. i.i.d. X_i , $i = 1,\dots,N$ $E[X_i] = m$, $Var[X_i]$ ignota. Allora l'intervallo di confidenza al 95% per m è $I_{0.95} = [M_1 - 1.96S/\sqrt{N}, M_1 + 1.96S/\sqrt{N}]$.	❑	■
Date due V.C. congiunte X ed Y, risulta che $E[X \mid Y=y]$ dipende linearmente da y.	❑	■
Nella stima ai minimi quadrati, se $N > q$, può essere $\det(\Phi'\Phi) = 0$.	■	❑
$E[\chi^2_N] = 2N$.	❑	■
Tra due stimatori (polarizzati o meno), a parità di altre condizioni, è preferibile quello che ha la varianza più piccola.	❑	■
La media campionaria delle V.C. i.i.d. X_i , $i = 1,\dots,N$, $E[X_i] = m$, $Var[X_i] = \sigma^2$, converge in media quadratica a m.	■	❑

4C. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false:
(Punteggio: risposta esatta = 1, errore = -1, non risponde = 0)

	V	F
• Per applicare il criterio FPE non è necessario ipotizzare che la ddp dei dati Y sia congiuntamente gaussiana.	■	❑
• Se una successione di V.C. converge quasi certamente, allora converge anche in distribuzione.	■	❑
• La media campionaria delle V.C. i.i.d. X_i , $i = 1,\ldots,N$, $E[X_i] = m$, $Var[X_i] = \sigma^2$, ha varianza σ^2/N ed è asintoticamente normale .	■	❑
• Uno stimatore $\hat{\theta}$ si dice polarizzato se $E[\hat{\theta}]=\theta°$, dove $\theta°$ indica il valore vero del parametro da stimare.	❑	■
• Si consideri la media campionaria delle V.C. i.i.d. X_i , $i = 1,\ldots,N$ $E[X_i] = m$, $Var[X_i]$ ignota. Allora l'intervallo di confidenza al 95% per m è $I_{0.95} = [M_1-2S_c/\sqrt{N}, M_1+2S_c/\sqrt{N}]$.	❑	■
• Date due V.C. X ed Y congiuntamente gaussiane, risulta che $Var[X \mid Y=y]$ dipende linearmente da y.	❑	■
• Nella stima ai minimi quadrati, se $N > q$, non può accadere che $\det(\Phi'\Phi) = 0$.	❑	■
• $E[\chi^2_N] = N^2$.	❑	■
• Tra due stimatori non polarizzati, a parità di altre condizioni, è preferibile quello che la deviazione standard più piccola.	■	❑
• La media campionaria delle V.C. i.i.d. X_i , $i = 1,\ldots,N$, $E[X_i] = m$, $Var[X_i] = \sigma^2$, converge in probabilità a m.	■	❑

4D. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false:
(Punteggio: risposta esatta = 1, errore = -1, non risponde = 0)

	V	F
• Per applicare il criterio FPE è necessario ipotizzare che la ddp dei dati Y sia congiuntamente gaussiana.	❑	■
• Se una successione di V.C. converge in probabilità, allora converge anche quasi certamente.	❑	■
• La media campionaria delle V.C. i.i.d. X_i , $i = 1,\ldots,N$, $X_i \sim N(m,\sigma^2)$, ha ddp gaussiana.	■	❑
• Se uno stimatore $\hat{\theta}$ è non polarizzato, allora $E[(\hat{\theta} - \theta°)^2] = Var[\hat{\theta}]$, dove $\theta°$ indica il valore vero del parametro da stimare.	■	❑
• Si consideri la media campionaria delle V.C. i.i.d. X_i , $i = 1,\ldots,N$ $E[X_i] = m$, $Var[X_i]$ ignota. Allora l'intervallo di confidenza al 95% per m è $I_{0.95} = [M_1-2S/\sqrt{N}, M_1+2S/\sqrt{N}]$.	❑	■
• Date due V.C. X ed Y congiunte, risulta che $Var[X \mid Y=y]$ dipende linearmente da y.	❑	■
• Nella stima ai minimi quadrati, se $N = q$, risulta sempre $\det(\Phi'\Phi) \neq 0$.	❑	■
• $E[\chi^2_N] = 2N-1$.	❑	■
• Tra due stimatori è sempre preferibile quello con varianza minore.	❑	■
• La media campionaria delle V.C. i.i.d. X_i , $i = 1,\ldots,N$, $E[X_i] = m$, $Var[X_i] = \sigma^2$, non converge in probabilità.	❑	■