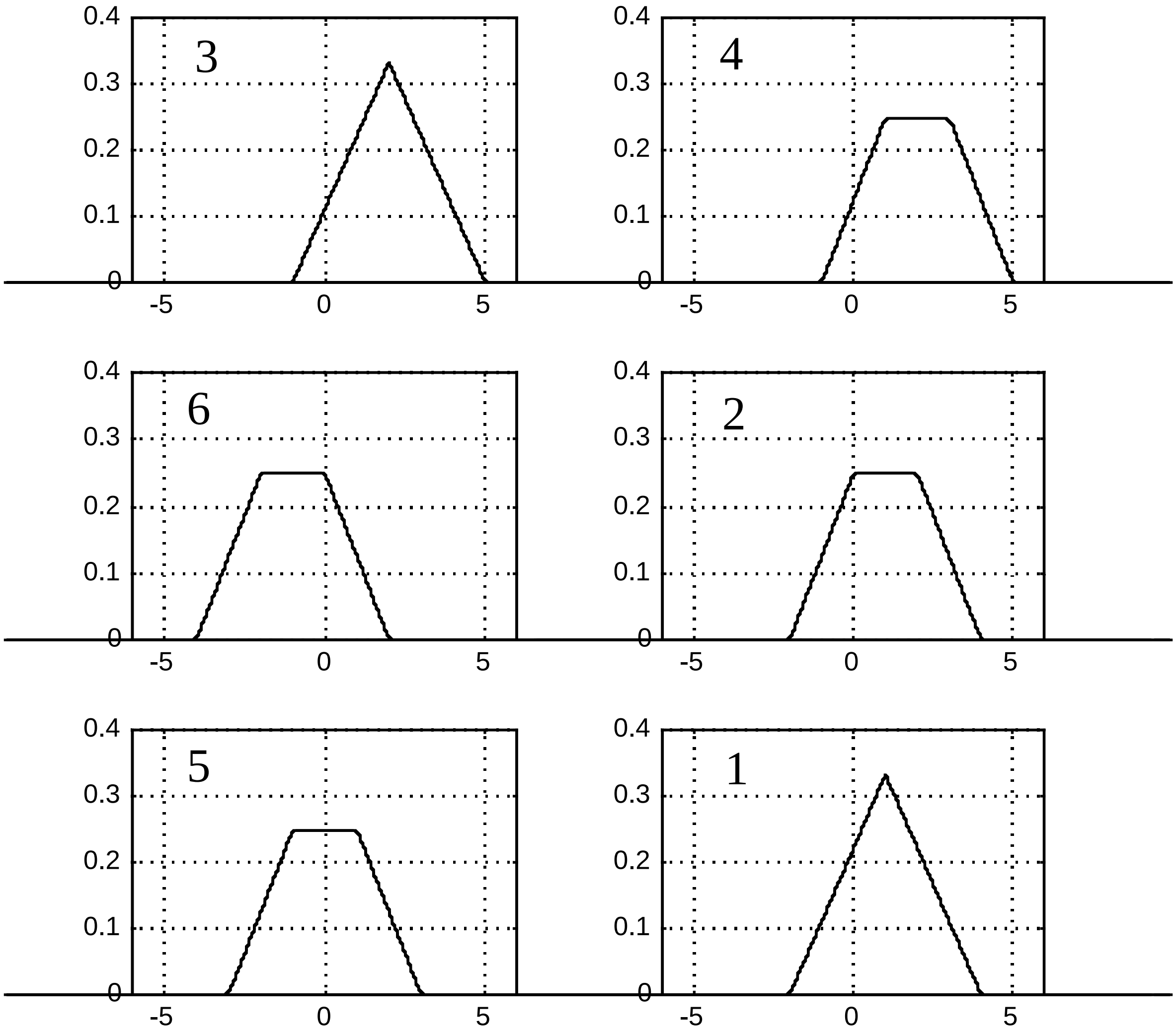
Identificazione dei Modelli e Analisi dei Dati (parte I) 4/7/2003

1. Date due V.C. X e Y indipendenti ed entrambe distribuite in modo uniforme in [0,1], si considerino le seguenti definizioni di W:

1. W= -3X+3Y +1	2. W= 2X+4Y -2	3. W=3X+3Y -1
4. W= 2X + 4Y -1	5. W= 2X+4Y-3	6. X = -2X+4Y-2

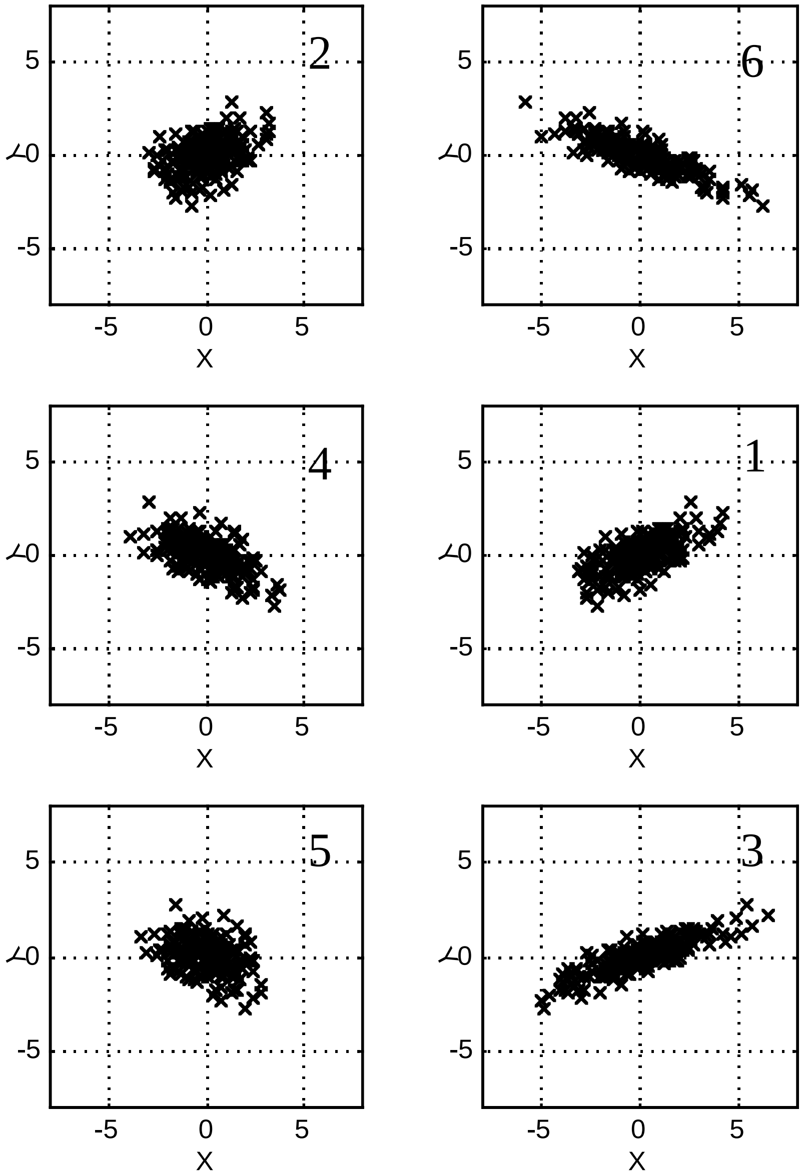
Scrivere sopra i grafici delle ddp il numero della scelta corretta



2. Date due V.C. V e W gaussiane standard e indipendenti tra di loro, si considerino le seguenti alternative per la definizione di X e Y:

1. X= V+ W Y= W	2. X = V + 0.5W Y = W	3. X = V + 2W Y = W
4. X= V- W Y= W	5. X = V - 0.5W Y = W	6. X = V - 2W Y = W

Scrivere sopra gli scatter plot il numero della scelta corretta



3. Dimostrare che, se X ed Y sono indipendenti, allora sono anche incorrelate.
(Suggerimento: X ed Y sono incorrelate se e solo se E[XY] = ...)

---

4. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false:
(Punteggio: risposta esatta = 1, errore = -1, non risponde = 0)

	V	*F*
• Dati due eventi A e B disgiunti, non può mai accadere che $P(A)+P(B) > 1$.	■	❑
• Date due V.C. X ed Y tra loro indipendenti, $F_{XY}(x,y) = P(X \leq x)\, P(Y \leq y)$.	■	❑
• La varianza della media campionaria coincide con la media della varianza campionaria.	❑	■
• Sia $Y = \Phi\theta+V$, con $E[V] = 0$, $Var[V] = \sigma^2\Psi$, Ψ nota. Quando si usa lo stimatore di Gauss-Markov, una stima non polarizzata di σ^2 è data da $\varepsilon'\varepsilon/(N-q)$, dove ε è il vettore dei residui, N è il numero di dati e q è il numero di parametri.	❑	■
• Se $Y = \Phi\theta+V$, con $E[V] = 0$, allora lo stimatore LS coincide con quello di Gauss-Markov (BLUE).	❑	■

Identificazione dei Modelli e Analisi dei Dati (parte II) 4/7/2003

1A. Si consideri il seguente processo casuale

$$y(t) = 2w(t\text{-}2) + 10w(t\text{-}3)\,, \qquad w(\cdot) \sim WGN(0,1)$$

1.a Ricavare il fattore spettrale canonico e il predittore ottimo ad un passo.

$$\mathbf{G(z) = 2z^{-2} + 10z^{-3} = 2\,\frac{z+5}{z^3}\,,\ \text{non canonico}}$$

$$\mathbf{T(z) = 5\,\frac{z+1/5}{z+5},\ z^2G(z)T(z) = 10\,\frac{z+1/5}{z}\,,\ \text{non canonico}}$$

$$\mathbf{\hat{G}(z) = \frac{z+1/5}{z} = 1 + 0.2\,z^{-1}\,,\ \hat{\sigma}^2 = 100}$$

$$\mathbf{C(z) = 1 + 0.2\,z^{-1},\ A(z) = 1}$$

$$\mathbf{C(z)\hat{Y}(z) = [C(z) - A(z)]Y(z)}$$

$$\mathbf{(1 + 0.2\,z^{-1})\,\hat{Y}(z) = 0.2\,z^{-1}\,Y(z)}$$

$$\mathbf{\hat{y}(t\,|\,t\text{-}1) = -\,0.2\hat{y}(t\text{-}1\,|\,t\text{-}2) + 0.2y(t\text{-}1)}$$

1.b Determinare la varianza dell'errore di predizione ad un passo.

$$\mathbf{Var[\varepsilon(t)] = \hat{\sigma}^2 = 100}$$

1B. Si consideri il seguente processo casuale

$$y(t) = 3w(t) + 6w(t-1)\,, \qquad w(\cdot) \sim WGN(0,1)$$

1.a Ricavare il fattore spettrale canonico e il predittore ottimo ad un passo.

$$\mathbf{G(z) = 3 + 6z^{-1} = 3\,\frac{z+2}{z}\,,\ \text{non canonico}}$$

$$\mathbf{T(z) = 2\,\frac{z+0.5}{z+2}\,,\ G(z)T(z) = 6\,\frac{z+0.5}{z}\,,\ \text{non canonico}}$$

$$\mathbf{\hat{G}(z) = \frac{z+0.5}{z} = 1 + 0.5\,z^{-1}\,,\ \hat{\sigma}^2 = 36}$$

$$\mathbf{C(z) = 1 + 0.5\,z^{-1},\ A(z) = 1}$$

$$\mathbf{C(z)\hat{Y}(z) = [C(z) - A(z)]Y(z)}$$

$$\mathbf{(1 + 0.5\,z^{-1})\,\hat{Y}(z) = 0.5\,z^{-1}\,Y(z)}$$

$$\mathbf{\hat{y}(t\,|\,t-1) = -\,0.5\hat{y}(t-1\,|\,t-2) + 0.5y(t-1)}$$

1.b Determinare la varianza dell'errore di predizione ad un passo.

$$\mathbf{Var[\varepsilon(t)] = \hat{\sigma}^2 = 36}$$

1C. Si consideri il seguente processo casuale

$$y(t) = w(t\text{-}1) + 4w(t\text{-}2)\,, \qquad w(\cdot) \sim WGN(0,1)$$

1.a Ricavare il fattore spettrale canonico e il predittore ottimo ad un passo.

$$\mathbf{G(z) = z^{-1} + 4z^{-2} = \frac{z + 4}{z^2}\ ,\ \ non\ canonico}$$

$$\mathbf{T(z) = 4\frac{z + 1/4}{z + 4},\ z\,G(z)\,T(z) = 4\frac{z + 0.25}{z}\ ,\ \ non\ canonico}$$

$$\mathbf{\hat{G}(z) = \frac{z + 0.25}{z} = 1 + 0.25\,z^{-1}\,,\ \hat{\sigma}^2 = 16}$$

$$\mathbf{C(z) = 1 + 0.25\,z^{-1},\ \ A(z) = 1}$$

$$\mathbf{C(z)\hat{Y}(z) = [C(z) - A(z)]Y(z)}$$

$$\mathbf{(1 + 0.25\,z^{-1})\,\hat{Y}(z) = 0.25\,z^{-1}\,Y(z)}$$

$$\mathbf{\hat{y}(t\,|\,t\text{-}1) = -\,0.25\hat{y}(t\text{-}1\,|\,t\text{-}2) + 0.25y(t\text{-}1)}$$

1.b Determinare la varianza dell'errore di predizione ad un passo.

$$\mathbf{Var[\varepsilon(t)] = \hat{\sigma}^2 = 16}$$

1D. Si consideri il seguente processo casuale

$$y(t) = 2w(t) + 5w(t-1)\,, \qquad w(\cdot) \sim WGN(0,1)$$

1.a Ricavare il fattore spettrale canonico e il predittore ottimo ad un passo.

$$\mathbf{G(z) = 2 + 5\,z^{-1} = 2\frac{z + 5/2}{z}\,,\ \text{non canonico}}$$

$$\mathbf{T(z) = \frac{5}{2}\,\frac{z + 2/5}{z + 5/2},\ G(z)T(z) = 5\frac{z + 2/5}{z}\,,\ \text{non canonico}}$$

$$\mathbf{\hat{G}(z) = \frac{z + 2/5}{z} = 1 + 0.4\,z^{-1}\,,\ \hat{\sigma}^2 = 25}$$

$$\mathbf{C(z) = 1 + 0.4\,z^{-1},\ A(z) = 1}$$

$$\mathbf{C(z)\hat{Y}(z) = [C(z) - A(z)]Y(z)}$$

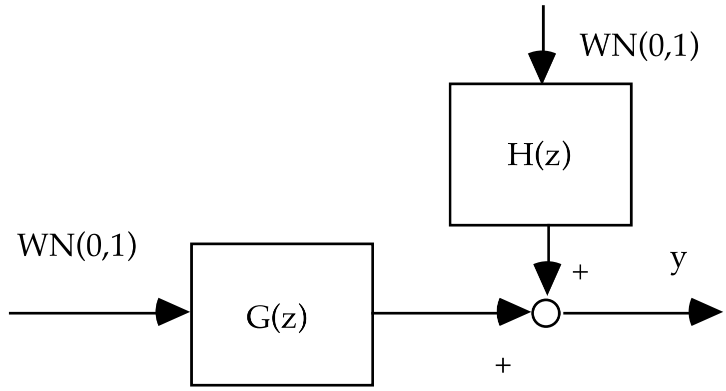
$$\mathbf{(1 + 0.4\,z^{-1})\,\hat{Y}(z) = 0.4\,z^{-1}\,Y(z)}$$

$$\mathbf{\hat{y}(t\,|\,t-1) = -\,0.4\hat{y}(t-1\,|\,t-2) + 0.4y(t-1)}$$

1.b Determinare la varianza dell'errore di predizione ad un passo.

$$\mathbf{Var[\varepsilon(t)] = \hat{\sigma}^2 = 25}$$

2A. Si consideri il seguente schema a blocchi in cui i rumori bianchi sono tra loro indipendenti:



Scrivere sopra ciascuno spettro il numero che identifica i corrispondenti valori delle funzioni di trasferimento G(z) e H(z).

1. $G(z) = 1$

$H(z) = \dfrac{1}{1+0.81z^{-2}}$

2. $G(z) = \dfrac{1+5z^{-1}}{1+0.2z^{-1}}$

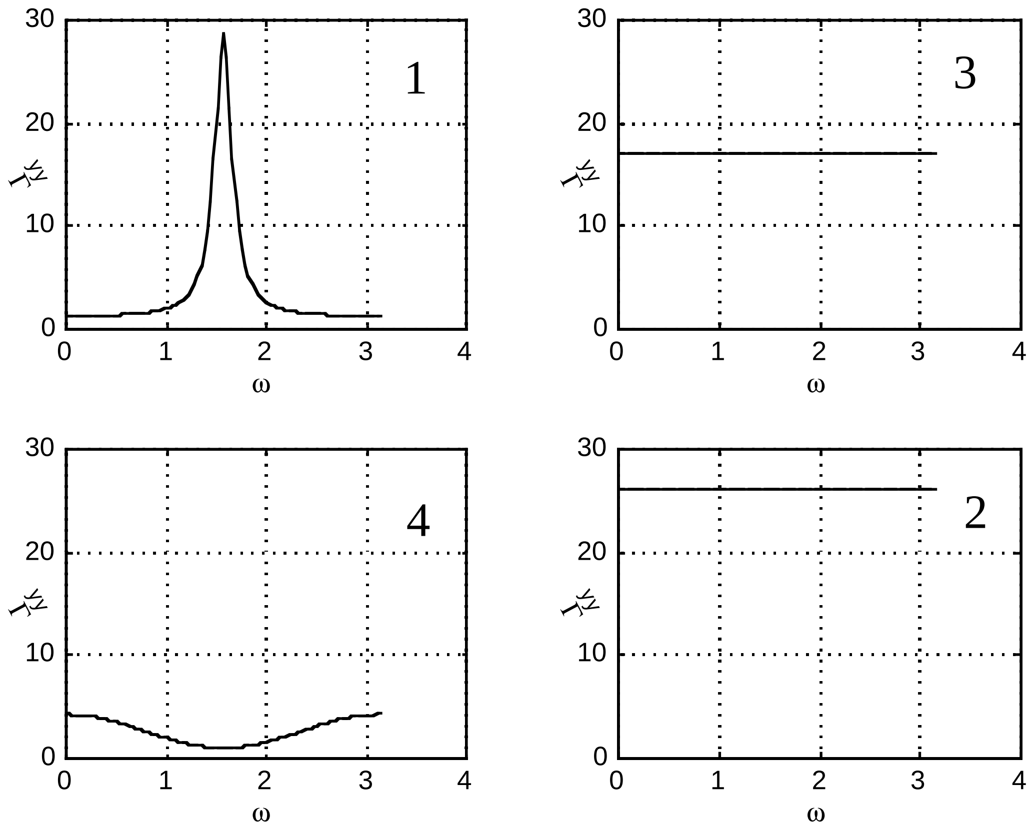
$H(z) = 1$

3. $G(z) = 1$

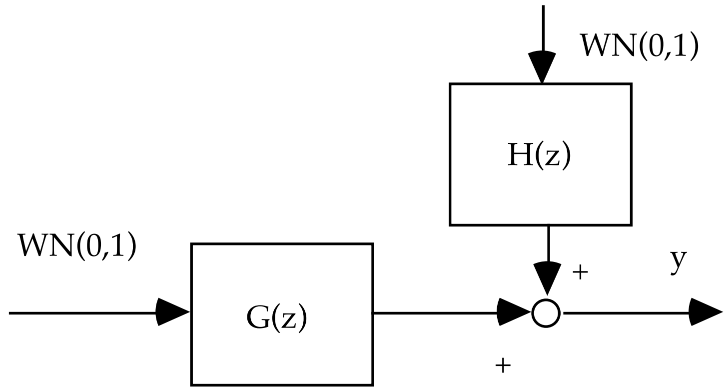
$H(z) = \dfrac{1+4z^{-1}}{1+0.25z^{-1}}$

4. $G(z) = 1$

$H(z) = 1+0.81z^{-2}$



2B. Si consideri il seguente schema a blocchi in cui i rumori bianchi sono tra loro indipendenti:



Scrivere sopra ciascuno spettro il numero che identifica i corrispondenti valori delle funzioni di trasferimento G(z) e H(z).

1. $G(z) = 1$

$H(z) = \dfrac{1}{1+0.64z^{-2}}$

2. $G(z) = \dfrac{1+2z^{-1}}{1+0.5z^{-1}}$

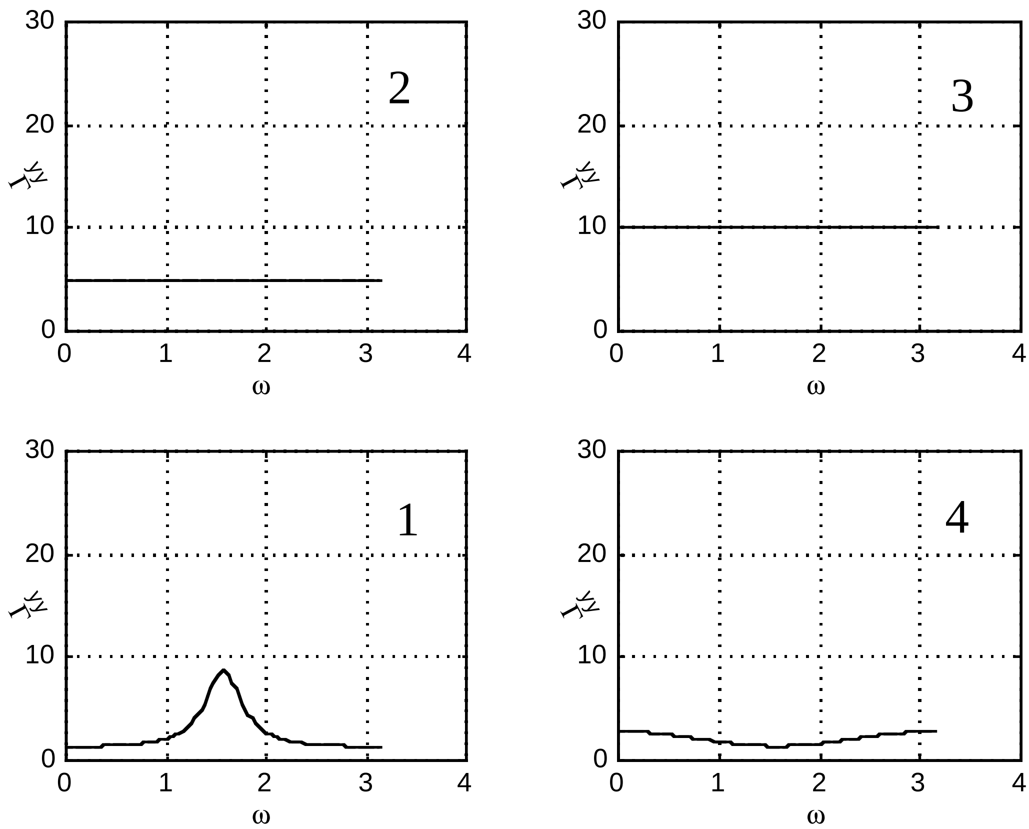
$H(z) = 1$

3. $G(z) = 1$

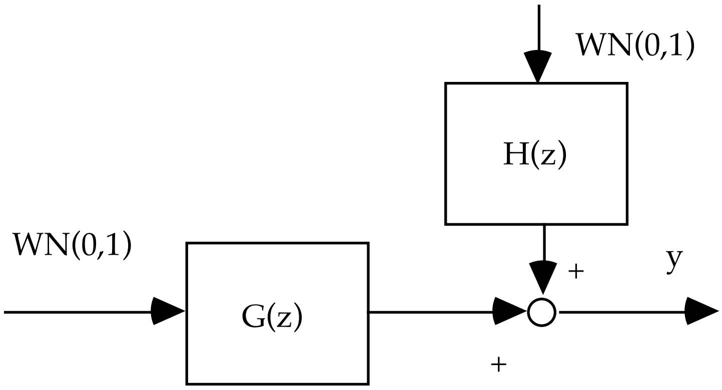
$H(z) = \dfrac{1+3z^{-1}}{1+0.33z^{-1}}$

4. $G(z) = 1$

$H(z) = 1+0.36z^{-2}$



2C. Si consideri il seguente schema a blocchi in cui i rumori bianchi sono tra loro indipendenti:



Scrivere sopra ciascuno spettro il numero che identifica i corrispondenti valori delle funzioni di trasferimento G(z) e H(z).

1. $G(z) = 1$

$H(z) = \dfrac{1}{1+0.49z^{-2}}$

2. $G(z) = \dfrac{1+4z^{-1}}{1+0.25z^{-1}}$

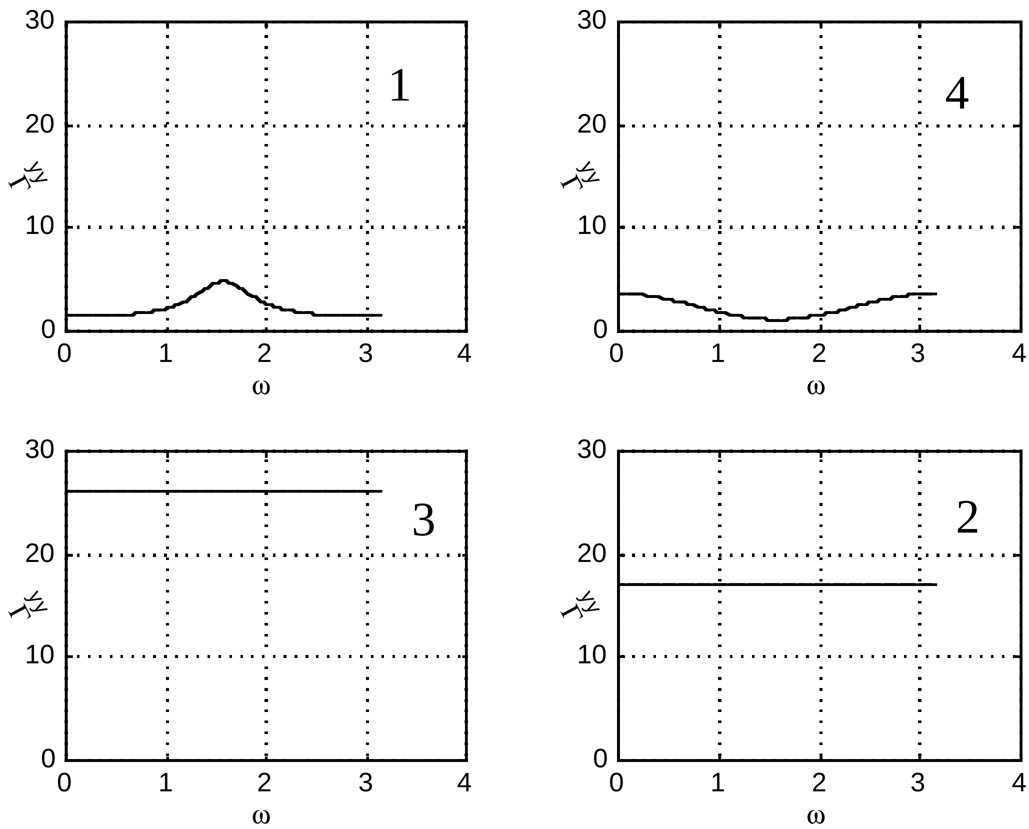
$H(z) = 1$

3. $G(z) = 1$

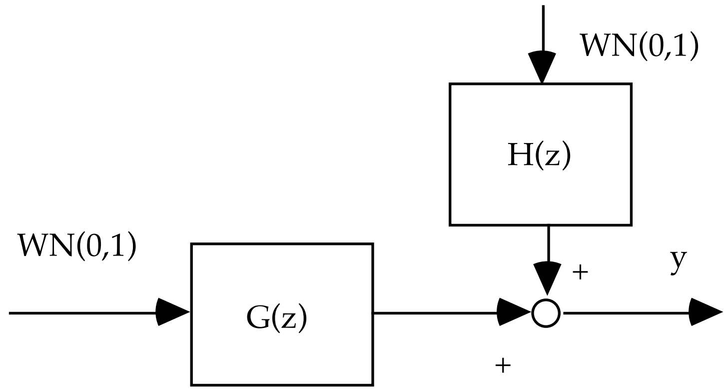
$H(z) = \dfrac{1+4z^{-1}}{1+0.25z^{-1}}$

4. $G(z) = 1$

$H(z) = 1+0.64z^{-2}$



2D. Si consideri il seguente schema a blocchi in cui i rumori bianchi sono tra loro indipendenti:



Scrivere sopra ciascuno spettro il numero che identifica i corrispondenti valori delle funzioni di trasferimento G(z) e H(z).

1. $G(z) = 1$

$H(z) = \dfrac{1}{1+0.36z^{-2}}$

2. $G(z) = \dfrac{1+3z^{-1}}{1+0.333z^{-1}}$

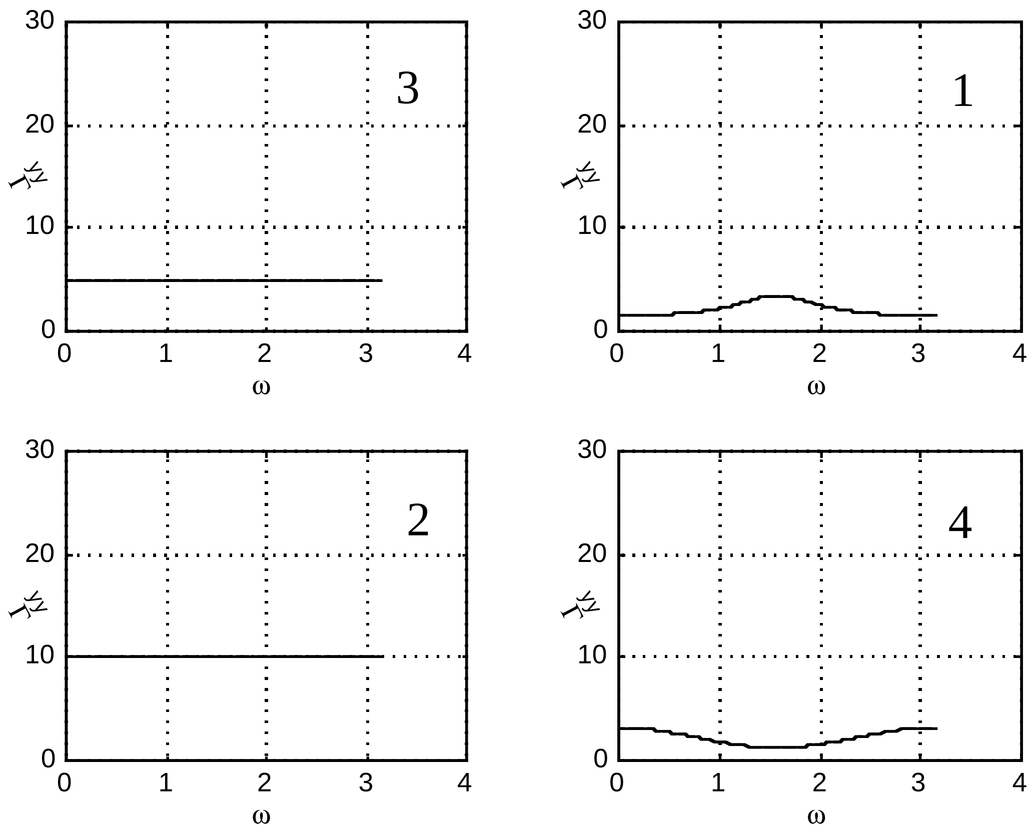
$H(z) = 1$

3. $G(z) = 1$

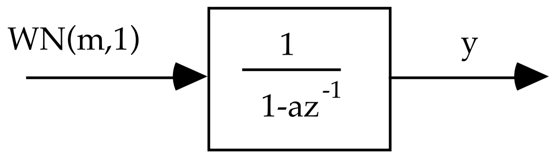
$H(z) = \dfrac{1+2z^{-1}}{1+0.5z^{-1}}$

4. $G(z) = 1$

$H(z) = 1+0.49z^{-2}$



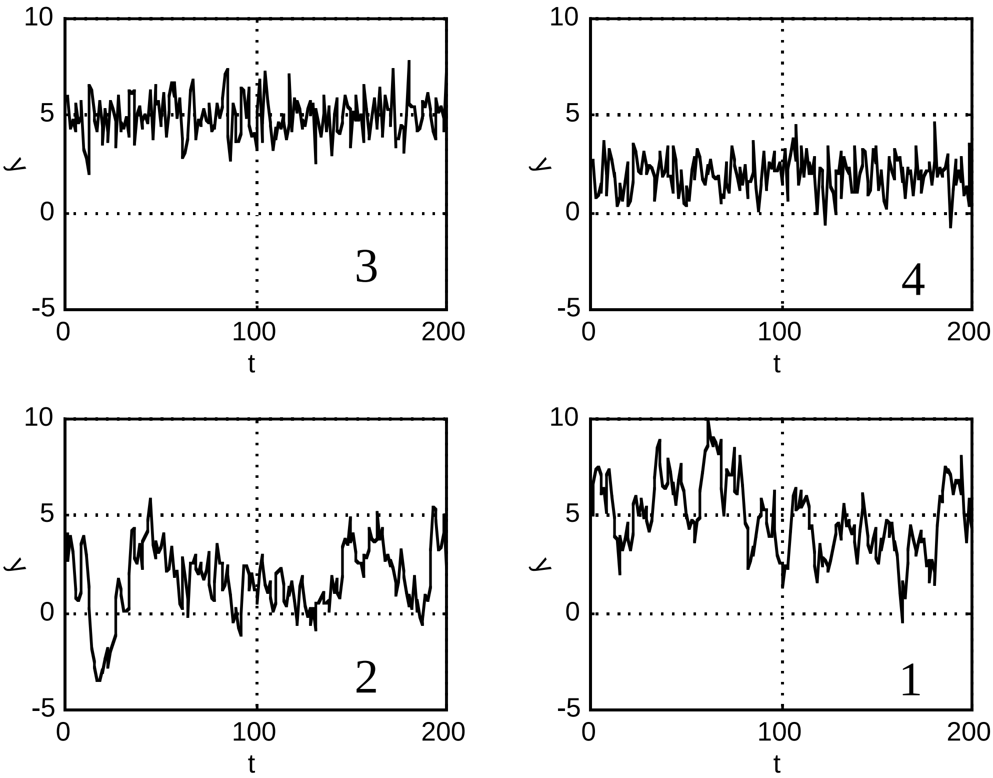
3A. Si consideri il seguente schema a blocchi:



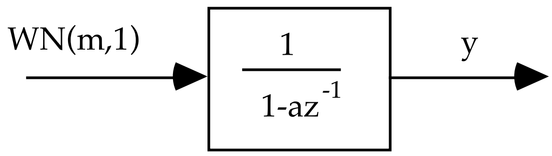
Scrivere sopra ciascuna realizzazione il numero che identifica i corrispondenti valori di m e a

1. m = 0.75, a = 0.85 **2.** m = 0.3, a = 0.85

3. m = 4, a = 0.2 **4.** m = 1.6, a = 0.2



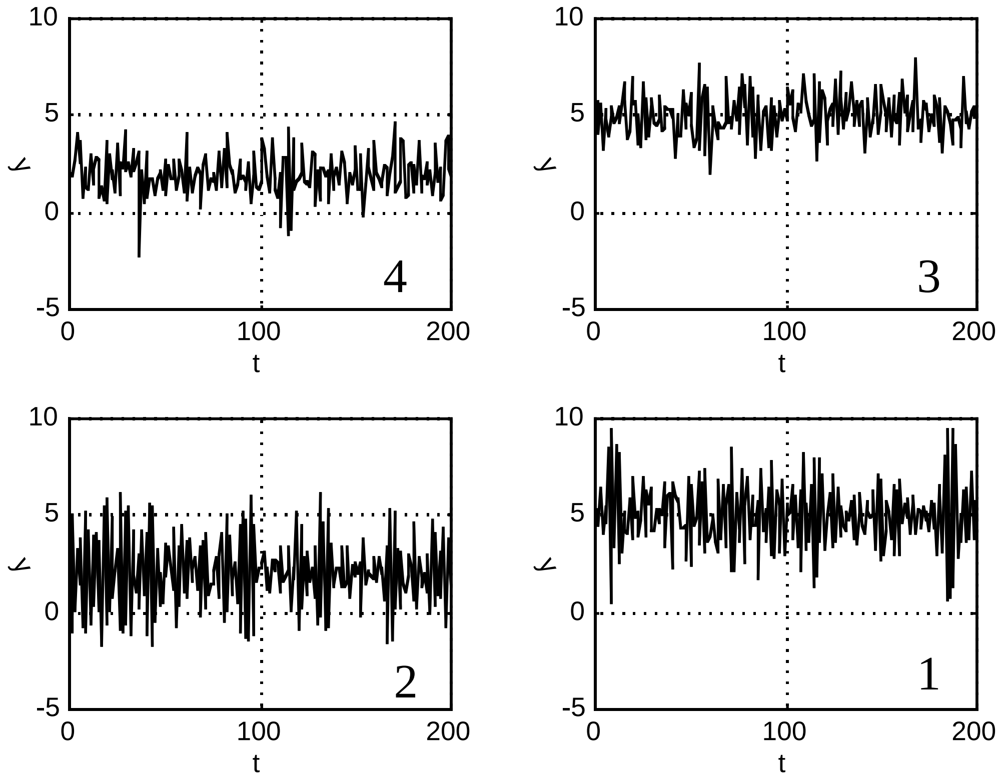
3B. Si consideri il seguente schema a blocchi:



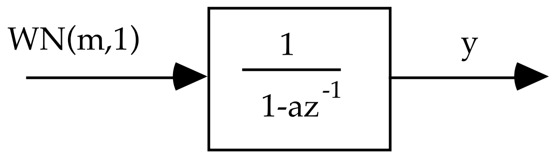
Scrivere sopra ciascuna realizzazione il numero che identifica i corrispondenti valori di m e a

1. m = 9.25, a = -0.85 **2.** m = 3.7, a = -0.85

3. m = 6, a = -0.2 **4.** m = 2.4, a = -0.2



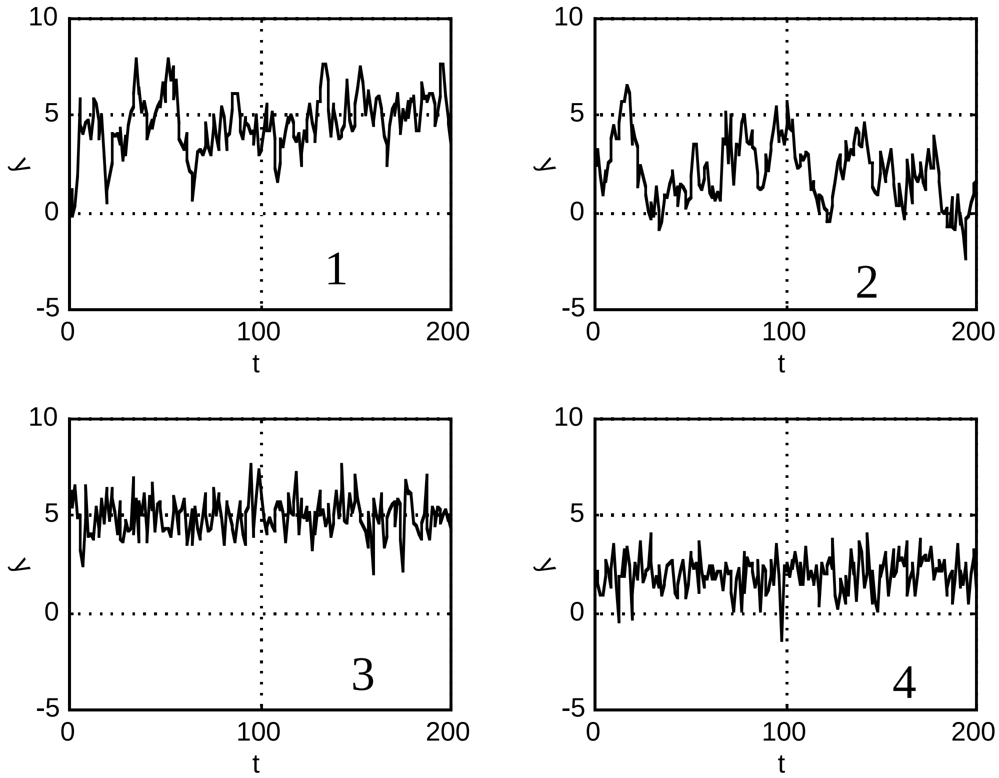
3C. Si consideri il seguente schema a blocchi:



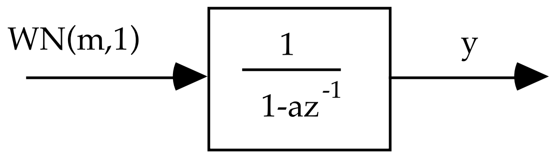
Scrivere sopra ciascuna realizzazione il numero che identifica i corrispondenti valori di m e a

1. m = 1, a = 0.8 **2.** m = 0.4, a = 0.8

3. m = 4.5, a = 0.1 **4.** m = 1.8, a = 0.1



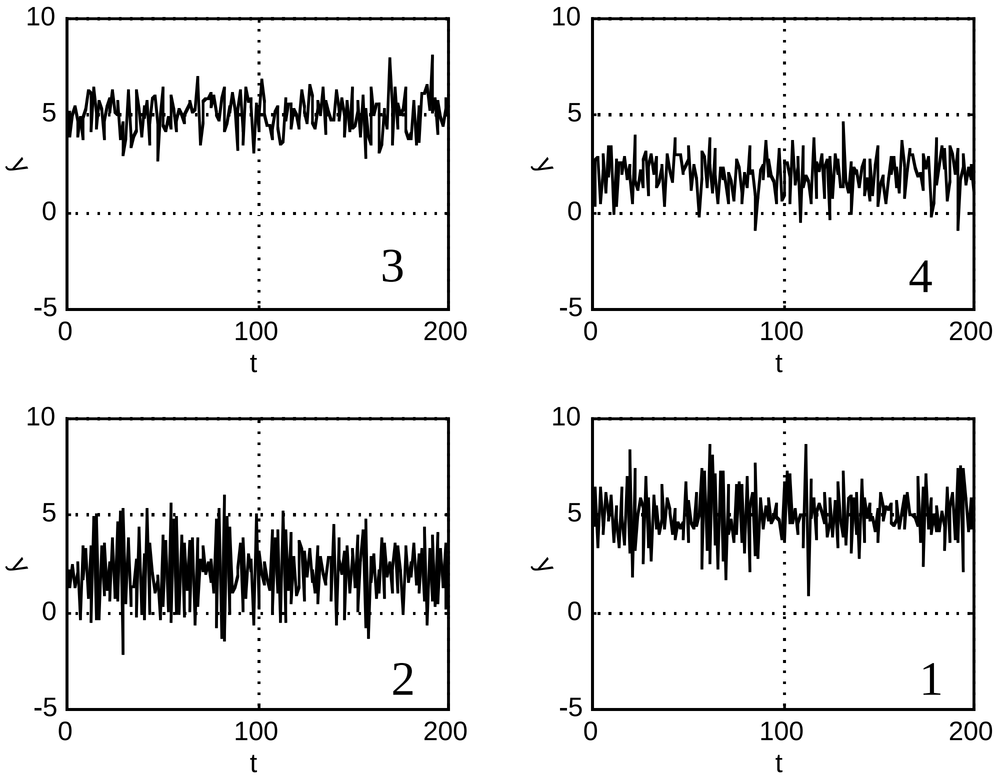
3D. Si consideri il seguente schema a blocchi:



Scrivere sopra ciascuna realizzazione il numero che identifica i corrispondenti valori di m e a

1. m = 9, a = -0.8 **2.** m = 3.6, a = -0.8

3. m = 5.5, a = -0.1 **4.** m = 2.2, a = -0.1



4A. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false:
(Punteggio: risposta esatta = 1, errore = -1, non risponde = 0)

	V	*F*
Si consideri una rete MLP (multi-layer perceptron) con nonlinearità di tipo sigmoide; se per calcolare i pesi si assume come criterio la minimizzazione della somma dei quadrati dei residui (= errori di ricostruzione rispetto agli esempi), si ricade in un problema di stima nonlineare nei parametri.	■	❑
La stabilità di un modello MA dipende dai coefficienti c_i della media mobile.	❑	■
Sia $y(\cdot)$ un P.C. stazionario con fattore spettrale canonico $(\hat{G}(z),\hat{\sigma}^2)$, $\hat{\sigma}^2 \neq 0$; allora, risulta sempre $\mathrm{Var}[y(t)] \geq \hat{\sigma}^2$.	■	❑
Sia $y(t) = x(t) + v(t)$, con $x(\cdot)$ e $v(\cdot)$ P.C. stazionari e incorrelati; allora, $\gamma_{yy}(\tau) = \gamma_{xx}(\tau) + \gamma_{vv}(\tau)$ se e solo se $x(t)$ e $w(t)$ sono rumori bianchi.	❑	■
Sia $y(\cdot)$ un P.C. stazionario ottenuto come l'uscita di un MA alimentato da un rumore bianco $w(\cdot)$ con $E[w(t)] = m_w \neq 0$. Allora, risulta sempre $E[y(t)] \geq m_w$.	❑	■
Di norma, nelle reti neurali, l'errore di stima è alto quando si usa una rete sovradimensionata rispetto agli esempi disponibili.	■	❑
Lo spettro $\Gamma_{yy}(\omega)$ di un processo MA(n) non può annullarsi in più di n punti in nell'intervallo $(-\pi,\pi]$.	■	❑
Dato un P.C. stazionario ergodico, il periodogramma è uno stimatore consistente dello spettro.	❑	■
Si consideri un P.C. stazionario $y(\cdot)$ tale che $Y(z) = G(z)W(z)$, $w(\cdot) \sim WGN(0,1)$, con $G(z)$ stabile; allora, indicando con $g(t)$ la risposta all'impulso di $G(z)$, risulta $\Gamma_{yy}(\omega) = \mathcal{F}[g(\cdot)]$.	❑	■
Sia $x(\cdot)$ un P.C. stazionario con $E[x(t)] = 0$. Allora, per $\lvert\tau\rvert < N$, $\hat{\gamma}_{xx}(\tau) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N-\lvert\tau\rvert} x(i)x(i+\tau)$ è uno stimatore non polarizzato della $\gamma_{xx}(\tau)$.	❑	■

4B. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false:
(Punteggio: risposta esatta = 1, errore = -1, non risponde = 0)

V *F*

- Si consideri una rete MLP (multi-layer perceptron) con nonlinearità di tipo sigmoide; se si aumenta il numero di neuroni la rete non soffre di overfitting.

  ❑ ■

- La stabilità di un modello MA è sempre garantita.

  ■ ❑

- Sia $y(\cdot)$ un P.C. stazionario con fattore spettrale canonico $(\hat{G}(z),\hat{\sigma}^2)$, $\hat{\sigma}^2 \neq 0$; allora, risulta sempre $\mathrm{Var}[y(t)] = \hat{\sigma}^2$.

  ❑ ■

- Sia $y(t) = x(t) + v(t)$, con $x(\cdot)$ e $v(\cdot)$ P.C. stazionari e incorrelati; allora, può accadere che $\gamma_{yy}(\tau) \neq \gamma_{xx}(\tau)+\gamma_{vv}(\tau)$.

  ❑ ■

- Sia $y(\cdot)$ un P.C. stazionario ottenuto come l'uscita di un MA alimentato da un rumore bianco $w(\cdot)$ con $E[w(t)] = m_w \neq 0$. Allora, risulta sempre $E[y(t)] = C(1)\, m_w$.

  ■ ❑

- Di norma, nelle reti neurali, l'errore di approssimazione è alto quando si usa una rete sovradimensionata rispetto agli esempi disponibili.

  ❑ ■

- Lo spettro $\Gamma_{yy}(\omega)$ di un processo MA(n) non può annullarsi in più di 2 punti in nell'intervallo $(-\pi,\pi]$.

  ❑ ■

- Dato un P.C. stazionario ergodico, il periodogramma è uno stimatore consistente dello spettro.

  ❑ ■

- Si consideri un P.C. stazionario $y(\cdot)$ tale che $Y(z) = G(z)W(z)$, $w(\cdot) \sim WGN(0,1)$, con $G(z)$ stabile; allora, lo spettro di $y(\cdot)$ non può mai essere costante sull'intervallo $[-\pi,\pi]$

  ❑ ■

- Sia $x(\cdot)$ un P.C. stazionario con $E[x(t)] = 0$. Allora, per $|\tau| < N$,

  $$\hat{\gamma}_{xx}(\tau) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N-|\tau|} x(i)x(i+\tau)$$

  è uno stimatore polarizzato e non consistente della $\gamma_{xx}(\tau)$.

  ❑ ■

4C. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false:
(Punteggio: risposta esatta = 1, errore = -1, non risponde = 0)

	V	*F*
• Si consideri una rete MLP (multi-layer perceptron) con nonlinearità di tipo sigmoide; il vettore dei parametri che minimizza SSR esiste ed è unico.	❑	■
• La stabilità di un modello MA è indipendente dai coefficienti c_i della media mobile.	■	❑
• Sia $y(\cdot)$ un P.C. stazionario con fattore spettrale canonico $(\hat{G}(z),\hat{\sigma}^2)$, $\hat{\sigma}^2 \neq 0$; allora, risulta sempre $Var[y(t)] \leq \hat{\sigma}^2$.	❑	■
• Sia $y(t) = x(t) + v(t)$, con $x(\cdot)$ e $v(\cdot)$ P.C. stazionari e incorrelati; allora, $\gamma_{yy}(\tau) = \gamma_{xx}(\tau) + \gamma_{vv}(\tau)$.	■	❑
• Sia $y(\cdot)$ un P.C. stazionario ottenuto come l'uscita di un MA alimentato da un rumore bianco $w(\cdot)$ con $E[w(t)] = m_w \neq 0$. Allora, risulta sempre $E[y(t)] = C(1)\, m_w$.	■	❑
• Di norma, nelle reti neurali se il modello è sottodimensionato, l'errore di approssimazione è alto.	■	❑
• Lo spettro $\Gamma_{yy}(\omega)$ di un processo MA(n) può annullarsi in più di n punti in nell'intervallo $(-\pi,\pi]$.	❑	■
• Dato un P.C. stazionario ergodico, il periodogramma è uno stimatore non consistente dello spettro.	■	❑
• Si consideri un P.C. stazionario $y(\cdot)$ tale che $Y(z) = G(z)W(z)$, $w(\cdot) \sim WGN(0,1)$, con $G(z)$ stabile; allora, $\Gamma_{yy}(\omega) = \lvert G(e^{j\omega})\rvert^2$.	■	❑
• Sia $x(\cdot)$ un P.C. stazionario con $E[x(t)] = 0$. Allora, per $\lvert\tau\rvert < N$, $\hat{\gamma}_{xx}(\tau) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N-\lvert\tau\rvert} x(i)x(i+\tau)$ è uno stimatore polarizzato della $\gamma_{xx}(\tau)$.	■	❑

4D. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false:
(Punteggio: risposta esatta = 1, errore = -1, non risponde = 0)

	V	F
Si consideri una rete RBF (radial basis function). Se le posizioni dei centri sono specificate e sono noti i parametri delle funzioni radiali, il problema dell'addestramento diventa lineare nei parametri.	■	❑
La stabilità di un modello MA dipende dal primo coefficiente c_1 della media mobile.	❑	■
Sia $y(\cdot)$ un P.C. stazionario con fattore spettrale canonico $(\hat{G}(z),\hat{\sigma}^2)$, $\hat{\sigma}^2 \neq 0$; allora, non è detto che esista il predittore ottimo.	■	❑
Sia $y(t) = x(t) - v(t)$, con $x(\cdot)$ e $v(\cdot)$ P.C. stazionari e incorrelati; allora, $\gamma_{yy}(\tau) = \gamma_{xx}(\tau) - \gamma_{vv}(\tau)$.	❑	■
Sia $y(\cdot)$ un P.C. stazionario ottenuto come l'uscita di un MA alimentato da un rumore bianco $w(\cdot)$ con $E[w(t)] = m_w \neq 0$. Allora, risulta sempre $E[y(t)] = m_w$.	❑	■
Di norma, nelle reti neurali, se migliora l'errore di stima, migliora anche l'errore di approssimazione.	❑	■
Lo spettro $\Gamma_{yy}(\omega)$ di un processo MA(n) può annullarsi in n punti in nell'intervallo $(-\pi,\pi]$.	■	❑
Dato un P.C. stazionario ergodico, il periodogramma è uno stimatore polarizzato dello spettro.	■	❑
Si consideri un P.C. stazionario $y(\cdot)$ tale che $Y(z) = G(z)W(z)$, $w(\cdot) \sim WGN(0,1)$, con $G(z)$ stabile; allora, la varianza di $y(t)$ è pari a $G(1)^2$.	❑	■
Sia $x(\cdot)$ un P.C. stazionario con $E[x(t)] = 0$. Allora, per $\lvert\tau\rvert < N$, $\hat{\gamma}_{xx}(\tau) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N-\lvert\tau\rvert} x(i)x(i+\tau)$ è uno stimatore asintoticamente non polarizzato della $\gamma_{xx}(\tau)$.	■	❑

Identificazione dei Modelli e Analisi dei Dati **4/7/03**
(prova sostitutiva del progetto)

1. Dimostrare che $E[(\alpha-X)^2]$ è minima per $\alpha = E[X]$.

2. Illustrare in non più di una pagina (si può scrivere sul retro del foglio) il metodo della stima a posteriori (Bayes) spiegando in particolare in che modo differisce dalla stima a massima verosimiglianza.