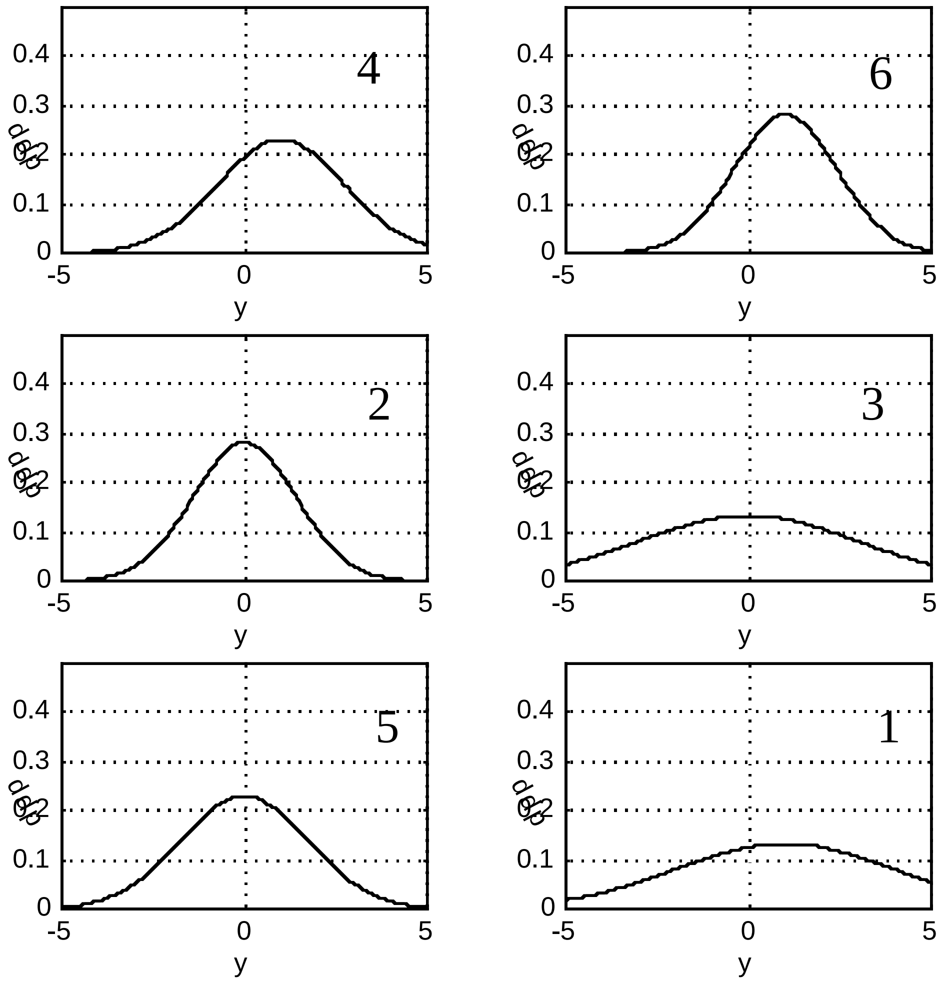
Identificazione dei Modelli (MN) 21/7/2003

1. Sia $Y = \alpha X + \beta Z + \gamma$, dove $X \sim N(0,2)$, $Z \sim N(1,1)$ sono V.C. indipendenti. Si considerino le seguenti scelte per i parametri α, β, γ:

1) $\alpha = 2$,	$\beta = 1$,	$\gamma = 0$	2) $\alpha = -1$,	$\beta = 0$,	$\gamma = 0$
3) $\alpha = 2$,	$\beta = 1$,	$\gamma = -1$	4) $\alpha = -1$,	$\beta = -1$,	$\gamma = 2$
5) $\alpha = -1$,	$\beta = -1$,	$\gamma = 1$	6) $\alpha = 1$,	$\beta = 0$,	$\gamma = 1$

Riportare sopra i seguenti grafici della densità di probabilità di Y il numero della corrispondente tripletta α,β,γ.



2. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false:
(Punteggio: risposta esatta = 1, errore = -1, non risponde = 0)

	V	F
• Se $P(B) \neq 0$, gli eventi A e B sono indipendenti se e solo se $P(A \mid B)=P(B)$.	☐	■
• Dati due eventi A e B, la probabilità che almeno uno dei due si verifichi è pari a $P(A+B)$.	■	☐
• Dati degli eventi di Poisson con frequenza media λ, la probabilità che il tempo di attesa tra due eventi successivi sia maggiore di T è pari a $1\text{-}\exp(-\lambda T)$.	☐	■
• Se $Y=g(X)$ con X gaussiana a valor medio nullo, allora $E[Y]=g(E[X])$.	☐	■
• La disuguaglianza di Cebicev afferma che $P(\lvert X-E[X]\rvert \geq \varepsilon) \leq Var[X]/\varepsilon^2$.	■	☐

3. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false:
(Punteggio: risposta esatta = 1, errore = -1, non risponde = 0)

	V	F
• Date due V.C. scalari X ed Y, se le ddp marginali $f_X(x)$ e $f_Y(y)$ sono gaussiane, allora anche la ddp congiunta $f_{XY}(x,y)$ è gaussiana.	☐	■
• Siano X e Y due V.C. congiuntamente gaussiane con $Var[X] \neq 0$, $Var[Y] \neq 0$. Allora X ed Y sono indipendenti se e solo se $r_{XY} = 0$.	■	☐
• La V.C. binomiale di ordine n, al crescere di n, converge in distribuzione ad una V.C. gaussiana.	■	☐
• I momenti campionari sono stimatori asintoticamente gaussiani solo se i dati sono congiuntamente gaussiani.	☐	■
• Sia $Y = \Phi\theta+V$, con $E[V] = 0$, e $Var[V] = \sigma^2 I$. Allora, $Var[\theta^{LS}]$ è una matrice diagonale.	☐	■

4. Si considerino i seguenti dati:

$y(1) = -1$ $y(2) = 1$ $y(3) = 1$ $y(4) = 3$

$x(1) = -1$ $x(2) = 0$ $x(3) = 1$ $x(4) = 2$

Si ipotizza che i dati siano generati dal seguente modello:

$y(t) = \theta\, x(t) + v(t)$, $t = 1, 2, 3, 4$

dove $v(t)$ sono errori di misura tra loro indipendenti con $Var[v(t)] = 1$.

4.a Calcolare la stima LS di θ.

$\mathbf{Y = [\ -1\ \ 1\ \ 1\ \ 3\ ]'}$, $\mathbf{\Phi = [\ -1\ \ 0\ \ 1\ \ 2\ ]'}$

$\boldsymbol{\theta^{LS} = (\Phi'\Phi)^{-1}\Phi'Y = 4/3}$

4.b Sotto l'ipotesi che gli errori $v(t)$ siano tra loro indipendenti e valor medio nullo con $Var[v(1)]=Var[v(2)]=1$, $Var[v(3)]=Var[v(4)]=2$, calcolare la stima BLUE di θ.

$$\mathbf{Var[V] = \Psi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}}$$

$\boldsymbol{\theta^{BLUE} = (\Phi'\Psi^{-1}\Phi)^{-1}\Phi'\Psi^{-1}Y = 9/7}$

4.c Si ipotizzi ora che i dati siano generati dal seguente modello:

$y(t) = \theta + v(t)$, $t = 1, 2, 3, 4$

Calcolare la stima LS e BLUE di θ (quest'ultima, sotto l'ipotesi che gli errori $v(t)$ soddisfino le ipotesi del punto 4.b).

$\mathbf{\Phi = [\ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ ]'}$

$\boldsymbol{\theta^{LS} = (\Phi'\Phi)^{-1}\Phi'Y = 1}$

$\boldsymbol{\theta^{BLUE} = (\Phi'\Psi^{-1}\Phi)^{-1}\Phi'\Psi^{-1}Y = 2/3}$