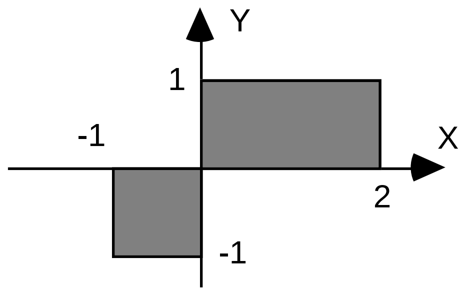
Identificazione dei Modelli e Analisi dei Dati (parte I) 21/7/2003

1. Si considerino le due V.C. X e Y, coordinate di un punto scelto in modo equiprobabile nella regione tratteggiata.



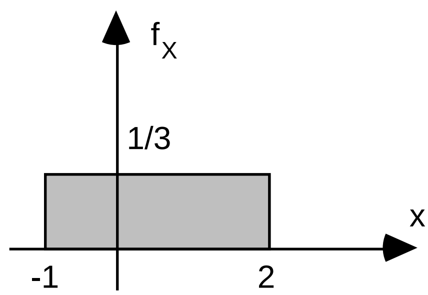
1.a Ricavare e tracciare il grafico di $f_X(x)$ e $f_Y(y)$.

Dato che lo spazio degli esiti è equiprobabile, $f_{XY}(x,y) = 1/3$, nella regione tratteggiata, $f_{XY}(x,y) = 0$, altrove

$$f_X(x) = \int_{-1}^{0} 1/3\, dy = 1/3, \quad -1 \le x \le 0$$

$$f_X(x) = \int_{0}^{1} 1/3\, dy = 1/3, \quad 0 \le x \le 2$$

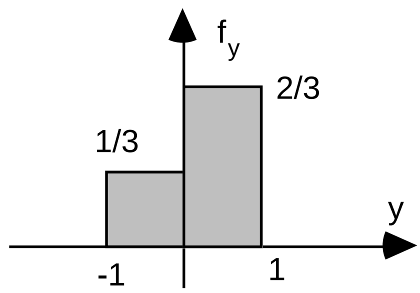
$f_X(x) = 0$, altrove



$$f_Y(y) = \int_{-1}^{0} 1/3\, dx = 1/3, \quad -1 \le y \le 0$$

$$f_Y(y) = \int_{0}^{2} 1/3\, dy = 2/3, \quad 0 \le x \le 1$$

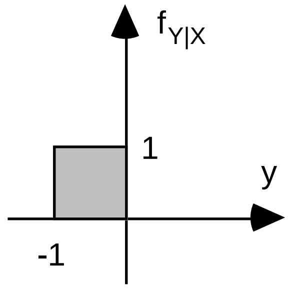
$f_Y(y) = 0$, altrove



1.b Ricavare e tracciare il grafico di $f_{Y|X}(y|X=-0.5)$ e $f_{Y|X}(y|X=1)$.

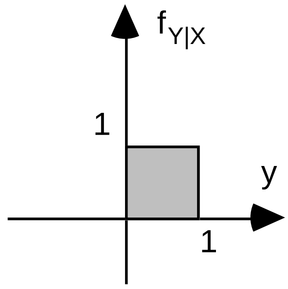
$$\mathbf{f_{Y|X}(y|X=-0.5) = \frac{f_{XY}(-0.5,y)}{f_X(-0.5)} = 1\ ,\ -1 \leq y \leq 0}$$

$f_{Y|X}(y|X=-0.5) = 0$, altrove



$$\mathbf{f_{Y|X}(y|X=1) = \frac{f_{XY}(1,y)}{f_X(1)} = 1\ ,\ 0 \leq y \leq 1}$$

$f_{Y|X}(y|X=1) = 0$, altrove



1.c Dire, motivando la risposta, se X e Y sono indipendenti.

Non sono indipendenti, perché $f_{Y|X}(y|X=x)$ dipende da x.

2. Si consideri un segnale y(t) di cui sono disponibili le seguenti misure:

$y(0) = 0.6 \qquad y(\pi/2) = 0.5 \qquad y(\pi) = -0.4 \qquad y(-\pi) = -0.5$

Vi sono due modelli possibili:

(a) $y(t_k) = \theta \sin(t_k) + v_k$
(b) $y(t_k) = \theta \cos(t_k) + v_k$

dove v_k indica degli errori di misura a valor medio nullo tra loro incorrelati con $Var[v_1]=Var[v_2]=2$, $Var[v_3]=Var[v_4]=1$.

2.a Supponendo che il modello (a) sia quello giusto calcolare la stima BLUE di θ.

$$\mathbf{Y = [\ 0.6 \quad 0.5 \quad -0.4 \quad -0.5\ ]' \ , \quad \Phi = [\ 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0\ ]'}$$

$$\mathbf{Var[V] = \Psi = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

$$\boldsymbol{\theta^{BLUE} = (\Phi'\Psi^{-1}\Phi)^{-1}\Phi'\Psi^{-1}Y = 0.5}$$

2.b Supponendo che il modello (b) sia quello giusto calcolare la stima BLUE di θ.

$$\mathbf{\Phi = [\ 1 \quad 0 \quad -1 \quad -1\ ]'}$$

$$\boldsymbol{\theta^{BLUE} = (\Phi'\Psi^{-1}\Phi)^{-1}\Phi'\Psi^{-1}Y = 0.48}$$

2.c Dire, motivando la risposta, se sono verificate le ipotesi di applicabilità del criterio FPE.

Non sono verificate perché non sono modelli gerarchici.

2.d Dire motivando la risposta quale dei due modelli è preferibile.

Dato che hanno lo stesso numero di parametri, è preferibile il modello per cui la somma dei quadrati dei residui è minore. Ricordando che SSR := $\varepsilon'\varepsilon$, $\varepsilon := Y - \Phi\theta$, e facendo i conti si vede che

$\mathbf{SSR_a > SSR_b}$

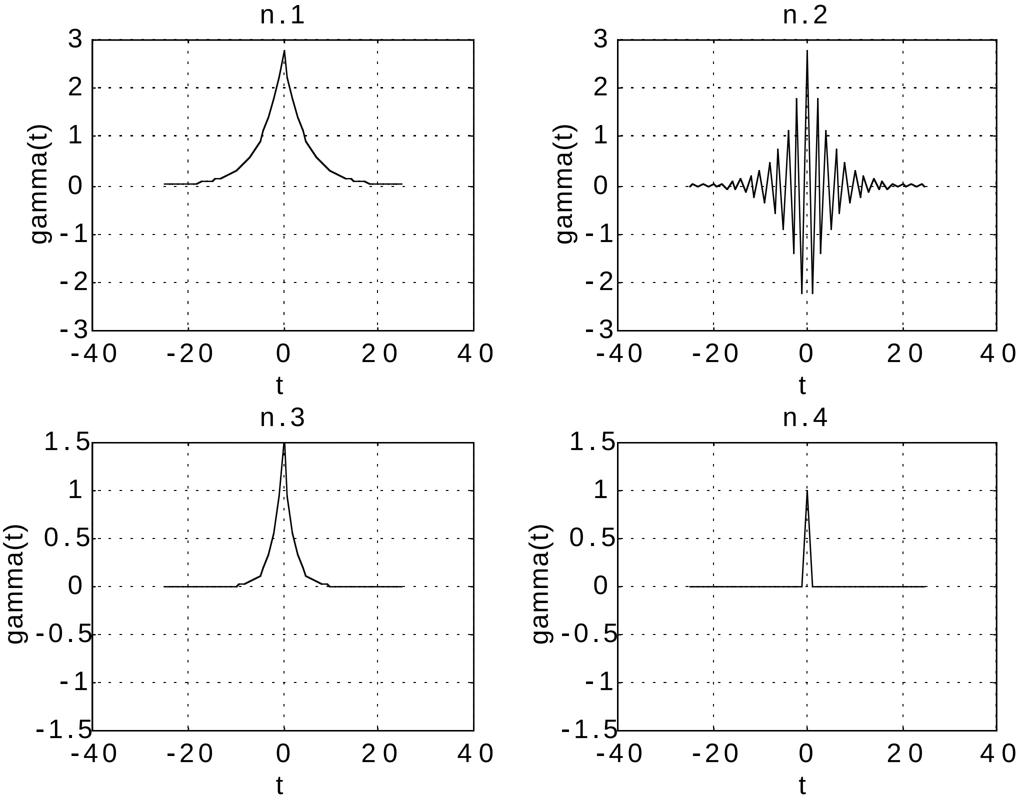
ed è pertanto preferibile il modello b).

3. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false:
(Punteggio: risposta esatta = 1, errore = -1, non risponde = 0)

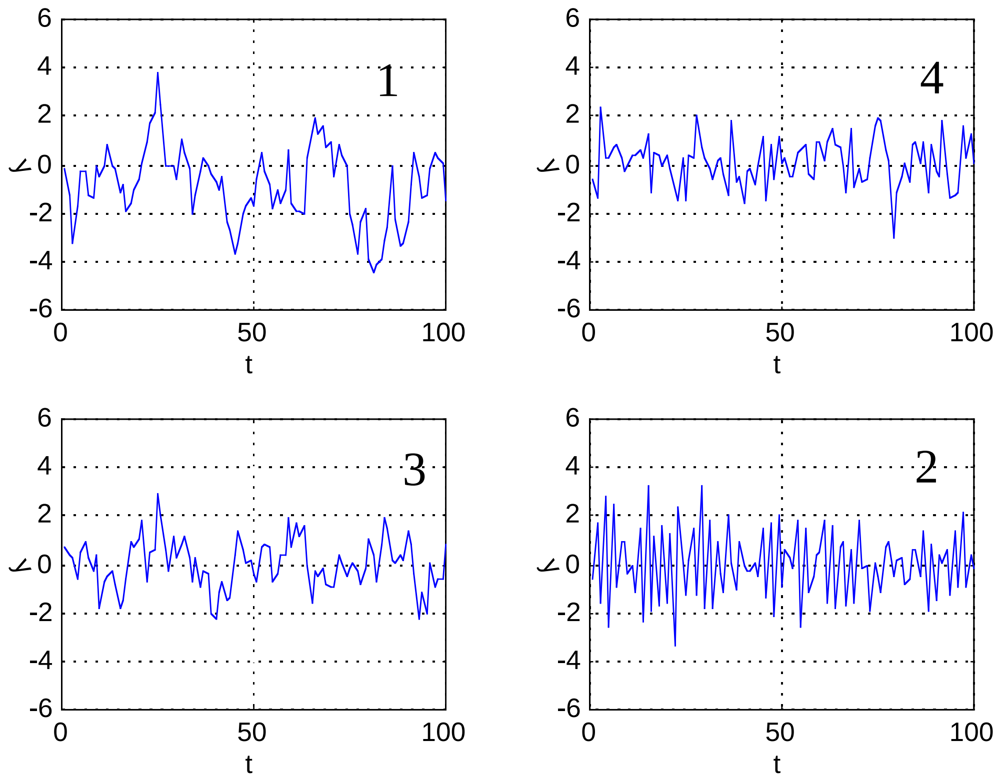
	V	*F*
• Se due eventi A e B sono indipendenti, allora P(A+B)=P(A)+P(B).	❑	■
• La probabilità che la somma di due dadi dia 3 è uguale a 1/18.	■	❑
• Si consideri una moneta onesta. La probabilità di ottenere la prima testa al quarto tentativo è pari a 1/16.	■	❑
• Sia X una V.C. di Bernoulli con parametro p=0.5. Allora, E[X] = 0.5, Var[X] = 0.25.	■	❑
• Sia X una V.C. esponenziale con E[X] = $1/\lambda$. Allora Y = 1 - exp($-\lambda$X) è una V.C. uniforme in [0,1].	■	❑
• Sia $Y = X_1^2 + X_2^2 + ... + X_N^2$, dove X_k sono i.i.d. con $X_k \sim N(0,1)$. Allora, E[Y] = 2N.	❑	■
• Sia M il numero di teste ottenuto lanciando N volte una moneta onesta. Allora, per la Legge dei Grandi Numeri, M/N converge in media quadratica a 1/2.	■	❑
• Sia M la media campionaria delle V.C. i.i.d. gaussiane X_k , k = 1,…,N. Allora, M è uno stimatore a minima varianza in quanto raggiunge il limite di Cramer-Rao.	■	❑
• Si consideri il modello $Y=\Phi\theta+V$, E[V] = 0. Allora, se Var[V] è diagonale, lo stimatore LS coincide con quello BLUE.	❑	■
• La cifra di merito FPE è uguale a N SSR/(N-q).	❑	■

Identificazione dei Modelli e Analisi dei Dati (parte II) 22/7/2003

1. Nei seguenti grafici sono riportate le funzioni di autocovarianza di 4 P.C. stazionari



Scrivere sopra il grafico della realizzazione il numero della corrispondente funzione di autocovarianza



2. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false:
(Punteggio: risposta esatta = 1, errore = -1, non risponde = 0)

	V	F
• Sia y(t) un un P.C. gaussiano. Se $E[y(t)] = m_y$, allora y(t) è stazionario in senso lato.	❑	■
• La densità spettrale di potenza $\Gamma_{yy}(\omega)$ di un P.C. stazionario y(t) è una funzione reale, pari e nonnegativa.	■	❑
• Se y(t) è un processo stazionario di tipo AR(n), la densità spettrale di potenza $\Gamma_{yy}(\omega)$ non si annulla mai.	■	❑
• Si consideri il P.C. stazionario $y(t) = ay(t-1) + w(t)$, $\|a\| < 1$, $w(t) \sim WN(0,1)$. Allora, $Var[y(t)] > 1$.	■	❑
• Un segnale periodico di periodo T (intero) non può esssere persistentemente eccitante di ogni ordine.	■	❑

Identificazione dei Modelli e Analisi dei Dati 22/7/2003
(prova sostitutiva del progetto)

1. Sia considerino delle osservazioni X_k , $k = 1,\ldots,N$, V.C. indipendenti e gaussiane, con $E[X_k] = m$.

1.a Sotto l'ipotesi che $Var[X_k] = \sigma^2$, ricavare lo stimatore a massima verosimiglianza di m.

Introduco le seguenti definizioni:

$\mathbf{Y_k := X_k\ ,\ V_k := X_k - m\ ,\ \theta := m}$

Allora, il modello può essere riformulato nel seguente modo

$\mathbf{Y = \Phi\theta + V,\ V \sim N\ (0,\Psi),\ \Psi = I.}$

$$\mathbf{\Phi = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \end{bmatrix}'}$$

Per tale modello, la fomula dello stimatore ML è data da

$$\mathbf{\theta^{ML} = (\Phi'\Psi^{-1}\Phi)^{-1}\Phi'\Psi^{-1}Y = (X_1 + X_2 + \; + X_N)/N}$$

1.b Sotto l'ipotesi che $Var[X_k] = \sigma_k^2$, ricavare lo stimatore a massima verosimiglianza di m.

Ora il modello diventa:

$\mathbf{Y = \Phi\theta + V,\ V \sim N\ (0,\Psi)}$

$$\mathbf{\Psi = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \sigma_N^2 \end{bmatrix}}$$

$$\mathbf{\theta^{ML} = (\Phi'\Psi^{-1}\Phi)^{-1}\Phi'\Psi^{-1}Y = \frac{X_1/\sigma_1^2 + X_2/\sigma_2^2 + \ldots + X_N/\sigma_N^2}{1/\sigma_1^2 + 1/\sigma_2^2 + \ldots + 1/\sigma_N^2}}$$