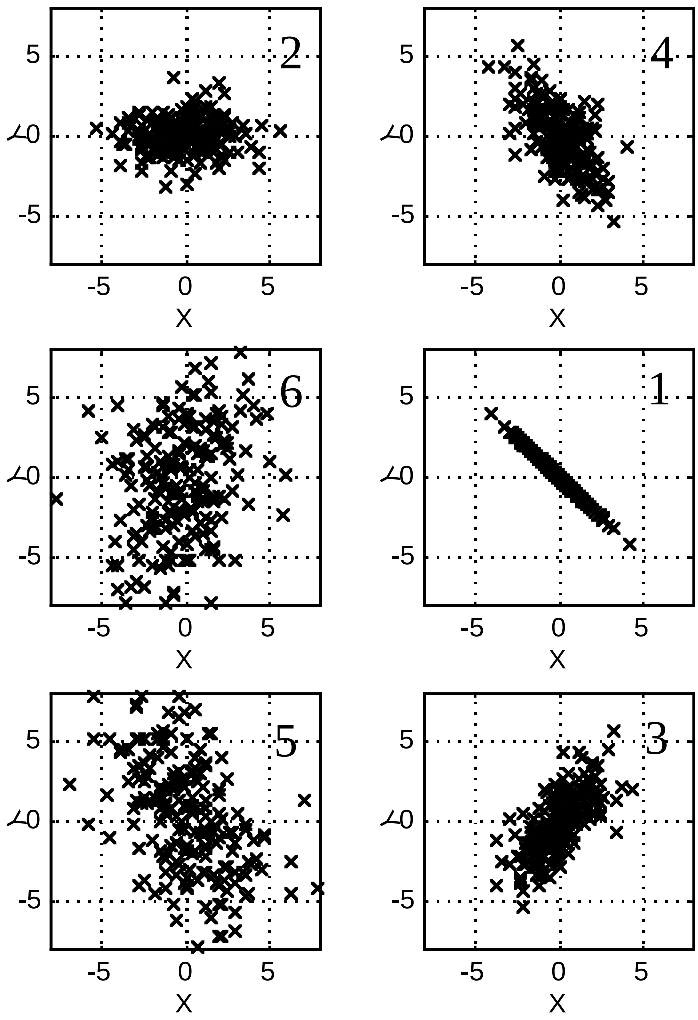
Identificazione dei Modelli e Analisi dei Dati (parte I) **26/9/2003**

1. Date due V.C. V e W gaussiane standard e indipendenti tra di loro, si considerino le seguenti alternative per la definizione di X e Y:

1. X= -V+ W Y= V-W	2. X = 2W Y = V	3. X = V+W Y = 2W
4. X= V - W Y= 2W	5. X = 2V + W Y = -4W	6. X = -2V + W Y = 4W

Scrivere sopra gli scatter plot il numero della scelta corretta



2. Si consideri un segnale y(t) di cui sono disponibili le seguenti misure:

$y(-2) = -2$ $y(-1) = -0.5$ $y(0) = 0.4$ $y(1) = 0.5$

Il modello è:

$y(t_k) = \theta\, t_k^2 + v_k$

dove v_k indica degli errori di misura.

2.a Calcolare la stima LS di θ.

$$\mathbf{Y} = [\,-2 \quad -0.5 \quad 0.4 \quad 0.5\,]' \;, \quad \boldsymbol{\Phi} = [\;4 \quad 1 \quad 0 \quad 1\;]'$$

$$\boldsymbol{\theta}^{LS} = (\boldsymbol{\Phi}'\boldsymbol{\Phi})^{-1}\boldsymbol{\Phi}'\mathbf{Y} = \mathbf{-479 = -0.44}$$

2.b Supponendo che gli errori di misura v_k abbiano valor medio nullo e siano tra loro incorrelati con $Var[v_1]=Var[v_2]=1$, $Var[v_3]=Var[v_4]=2$, calcolare la stima BLUE di θ.

$$\mathbf{Var[V]} = \boldsymbol{\sigma}^2\boldsymbol{\Psi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \; \boldsymbol{\sigma}^2 = 1$$

$$\boldsymbol{\theta}^{BLUE} = (\boldsymbol{\Phi}'\boldsymbol{\Psi}^{-1}\boldsymbol{\Phi})^{-1}\boldsymbol{\Phi}'\boldsymbol{\Psi}^{-1}\mathbf{Y} = \mathbf{-0.4714}$$

2.c Calcolare la matrice varianza dei parametri stimati per la stima BLUE del punto precedente.

$$\mathbf{Var}[\boldsymbol{\theta}^{BLUE}] = \boldsymbol{\sigma}^2(\boldsymbol{\Phi}'\boldsymbol{\Psi}^{-1}\boldsymbol{\Phi})^{-1} = \mathbf{0.0571}$$

3. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false:
(Punteggio: risposta esatta = 1, errore = -1, non risponde = 0)

V *F*

- Se due eventi A e B sono disgiunti ($AB = \{0\}$), allora $P(A+B)=P(A)+P(B)$.

  ■ ❑

- La d.d.p. di $V := \alpha X$ è $f_V(v) = \alpha f_X(v)$.

  ❑ ■

- Se X è una V.C. esponenziale, allora $F_X(x) = 0$, $\forall x<0$.

  ■ ❑

- Due V.C. congiuntamente gaussiane sono indipendenti se e solo se $E[XY] = E[X]E[Y]$.

  ■ ❑

- Siano X ed Y le coordinate di un punto scelto in modo equiprobabile in un rettangolo con lati paralleli agli assi coordinati. Allora, X ed Y sono indipendenti.

  ■ ❑

- Si considerino degli eventi di Poisson con frequenza media λ. Se in $t = 0$ c'é stato un evento, la probabilità che non si verifichino altri eventi nell'intervallo $(0,T]$ è pari a $e^{-\lambda T}$.

  ■ ❑

- Siano V e W due V.C. incorrelate. Se $X = aV+bW$, $Y=cV+dW$, allora X e Y sono incorrelate per ogni possibile scelta di a,b,c,d.

  ❑ ■

- Sia M il numero di teste ottenuto lanciando N volte una moneta onesta. Allora, per la Legge dei Grandi Numeri, M/N converge in media quadratica a 1/2.

  ■ ❑

- Si indichi con S^2 la varianza campionaria (non corretta) delle V.C. i.i.d. X_i , $i = 1,\ldots,N$ $E[X_i] = m$, $Var[X_i] = \sigma^2$. Allora, S^2 è uno stimatore polarizzato di σ^2. Inoltre, è consistente.

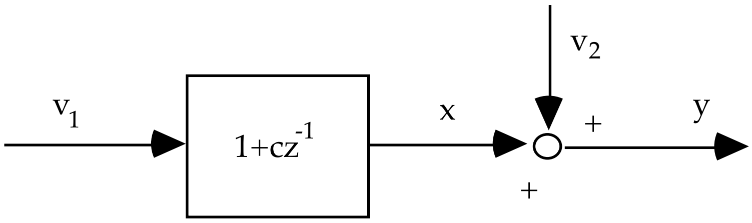
  ■ ❑

- Si consideri il modello $Y=\Phi\theta+V$. Allora, se rango(Φ)=q, dove q è la dimensione del vettore θ, lo stimatore ai minimi quadrati è dato da $\theta^{LS} = (\Phi'\Phi)^{-1}Y$.

  ❑ ■

Identificazione dei Modelli e Analisi dei Dati (parte II) 26/9/2003

1. Si consideri il seguente schema a blocchi in cui $v_1(\cdot) \sim WN(0,1)$, e $v_2(\cdot) \sim WN(m,\sigma^2)$ sono tra loro indipendenti:



Sapendo che $E[y(t)] = 1$, $\gamma_{yy}(0) = 3$, $\gamma_{yy}(1) = 0.6$, determinare i valori di c, m, σ^2.

$E[y(t)] = E[x(t)] + E[v_2(t)] = m$

Dato che $E[y(t)] = 1$, ne segue che $m = 1$.

$\gamma_{yy}(\tau) = \gamma_{xx}(\tau) + \sigma^2\delta(\tau)$ ($\delta(\tau)$ indica l'impulso a tempo discreto)

$\gamma_{xx}(0) = 1 + c^2$

$\gamma_{xx}(1) = c$

$\gamma_{xx}(\tau) = 0, \ |\tau| > 1$

Dato che $\gamma_{yy}(1) = 0.6$, ne segue che $c = 0.6$

Dato che $\gamma_{xx}(0) = 3$, ne segue che $\sigma^2 = \gamma_{yy}(0) - \gamma_{xx}(0) = 3 - 1 - c^2 = 1.64$

2. Discutere in non più di una pagina il problema della stima dello spettro di un processo casuale stazionario.

Identificazione dei Modelli e Analisi dei Dati **26/9/2003**
(prova sostitutiva del progetto)

1. Dimostrare che $E[(\alpha-X)^2]$ è minima per $\alpha = E[X]$.

2. Illustrare in non più di una pagina (si può scrivere sul retro del foglio) il metodo della stima a posteriori (Bayes) spiegando in particolare in che modo differisce dalla stima a massima verosimiglianza.