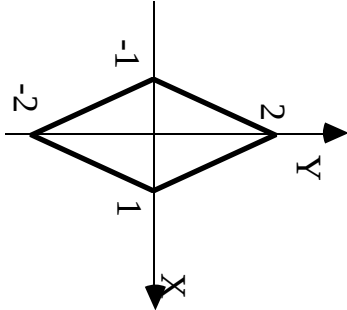


1. Dimostrare che $E[aX+bY] = aE[X] + bE[Y]$.

2. Si considerino le V.C. X, Y , coordinate di un punto scelto in modo equiprobabile nel rombo disegnato in figura.



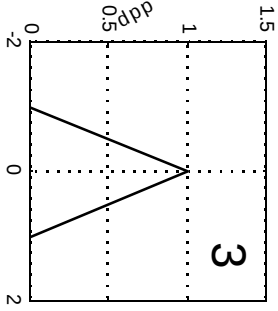
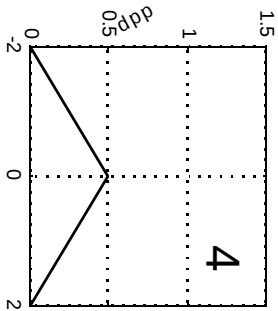
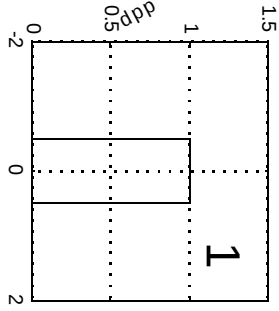
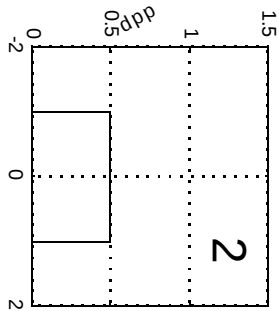
Scrivere sopra le figure delle densità di probabilità il numero della corrispondente densità.

1) $f_{X|Y}(x|Y=1)$

2) $f_{Y|X}(y|X=0.5)$

3) $f_X(x)$

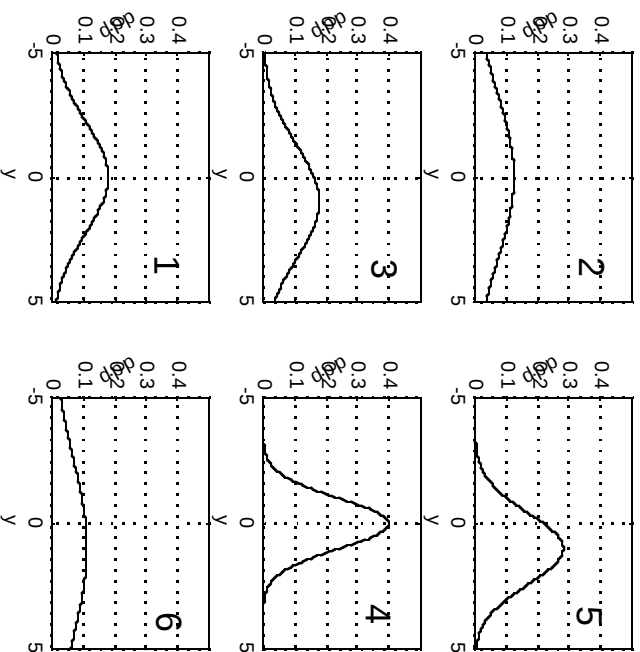
4) $f_Y(y)$



3. Sia $Y = \alpha X + \beta Z + \gamma$, dove $X \sim N(0,2)$, $Z \sim N(0,1)$, $\text{Cov}[X,Z] = 1$. Si considerino le seguenti scelte per i parametri α, β, γ :

1) $\alpha = 1$,	$\beta = 1$,	$\gamma = 0$	2) $\alpha = 1$,	$\beta = 2$,	$\gamma = 0$
3) $\alpha = 2$,	$\beta = -1$,	$\gamma = 1$	4) $\alpha = 1$,	$\beta = -1$,	$\gamma = 0$
5) $\alpha = 1$,	$\beta = -2$,	$\gamma = 1$	6) $\alpha = 2$,	$\beta = 1$,	$\gamma = 1$

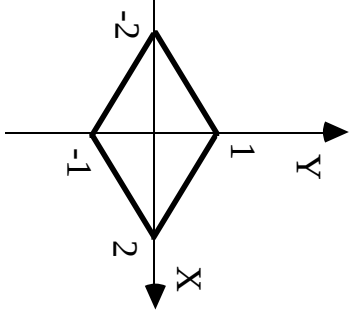
Riportare sopra i seguenti grafici della densità di probabilità di Y il numero della corrispondente tripletta α, β, γ



4. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false:
(Punteggio: risposta esatta = 1, errore = -1, non risponde = 0)
1. Dati due eventi A e B , se $A = \{0\}$, allora A e B sono incompatibili. V ☐ F ☐
2. Dati tre eventi A, B, C tali che $P(BC) \neq 0$, risulta sempre $P(ABC) = P(A|B)P(B|C)P(C)$. ☐ ☒
3. La probabilità di ottenere più di un successo in n prove di Bernoulli è pari a $1 - q^n - nq^{n-1}$. ☐ ☒
4. La somma di k variabili esponenziali indipendenti è una Erlang- k ed ha varianza pari a k/λ^2 . ☒ ☐
5. Date due V.C. X, Y esponenziali i.i.d., la V.C. $V := X + Y$ è distribuita come una Erlang-2. ☒ ☐
6. Data una V.C. X uniforme in $[-1,1]$, la V.C. $Y := |2X|$ è uniforme in $[0,2]$. ☒ ☐
7. Data una V.C. X uniforme in $[0,\pi]$, risulta $E[\sin(X)] = 1/\pi$. ☐ ☒
8. Siano X ed Y le coordinate di un punto scelto in modo equiprobabile in un rettangolo con lati paralleli agli assi coordinati. Allora, X ed Y sono indipendenti. ☒ ☐
9. Dato un numero reale α , risulta $E[(X-\alpha)^2] = (E[X]-\alpha)^2 - \sigma^2_X$. ☐ ☒
10. Sia $V = aX+b$, $W = cX+d$ dove X e Y sono due V.C. indipendenti. Allora, V e W sono incorrelate. ☒ ☐

1B. Dimostrare che, se X ed Y sono indipendenti, allora sono anche incorrelate.

2B. Si considerino le V.C. X , Y , coordinate di un punto scelto in modo equiprobabile nel rombo disegnato in figura.



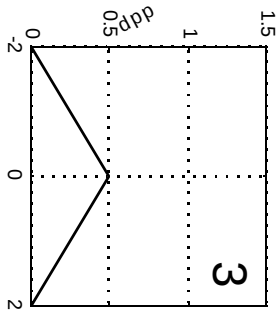
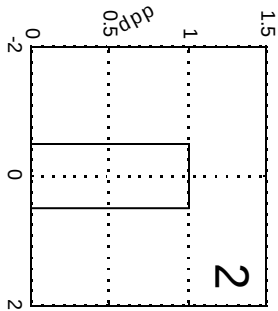
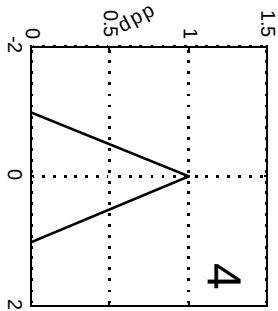
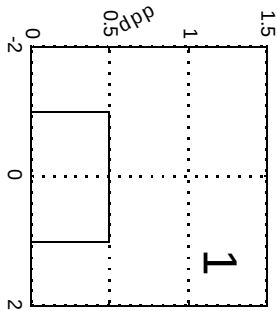
Scrivere sopra le figure delle densità di probabilità il numero della corrispondente densità.

1) $f_{X|Y}(x|Y=0.5)$

2) $f_{Y|X}(y|X=1)$

3) $f_X(x)$

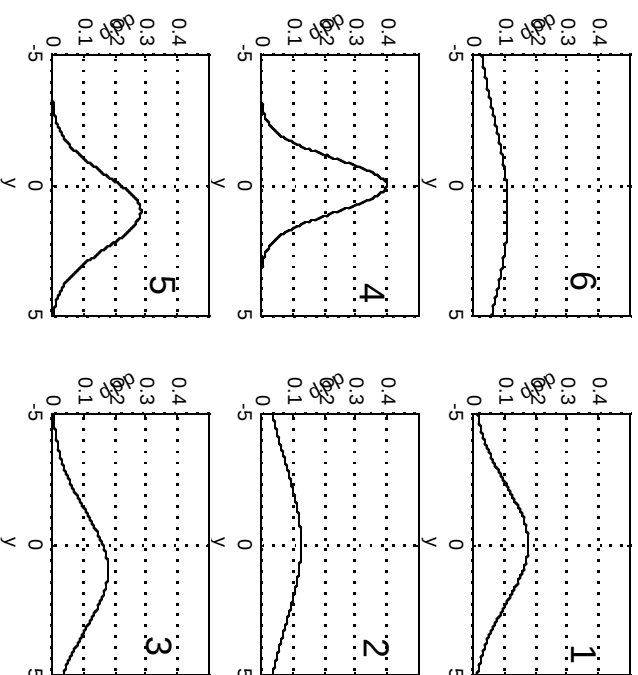
4) $f_Y(y)$



3B. Sia $Y = \alpha X + \beta Z + \gamma$, dove $X \sim N(0,2)$, $Z \sim N(0,1)$, $\text{Cov}[X,Z] = 1$. Si considerino le seguenti scelte per i parametri α, β, γ :

- | | | | | | |
|------------------|---------------|--------------|------------------|---------------|--------------|
| 1) $\alpha = 1,$ | $\beta = 1,$ | $\gamma = 0$ | 2) $\alpha = 1,$ | $\beta = 2,$ | $\gamma = 0$ |
| 3) $\alpha = 2,$ | $\beta = -1,$ | $\gamma = 1$ | 4) $\alpha = 1,$ | $\beta = -1,$ | $\gamma = 0$ |
| 5) $\alpha = 1,$ | $\beta = -2,$ | $\gamma = 1$ | 6) $\alpha = 2,$ | $\beta = 1,$ | $\gamma = 1$ |

Riportare sopra i seguenti grafici della densità di probabilità di Y il numero della corrispondente tripletta α, β, γ



4B. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false:
(Punteggio: risposta esatta = 1, errore = -1, non risponde = 0)

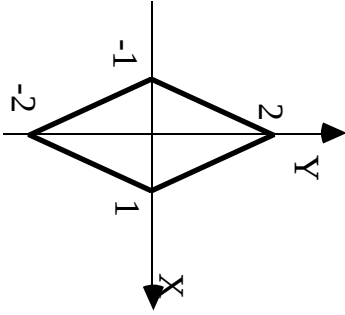
- Dati due eventi A e B , se $A = \{0\}$, allora A e B sono indipendenti.
- Dati tre eventi A, B, C tali che $P(BC) \neq 0$, risulta sempre $P(ABC) = P(A|BC)P(B|C)P(C)$.
- La probabilità di ottenere più di un successo in n prove di Bernoulli è pari a $1 - q^n - npq^{n-1}$.
- La somma di k variabili esponenziali indipendenti è una Erlang- k ed ha varianza pari a k^2/λ^2 .
- Date due V.C. X, Y esponenziali i.i.d., la V.C. $V := X - Y$ è distribuita come una Erlang-2.
- Data una V.C. X uniforme in $[-1,1]$, la V.C. $Y = |X|$ è uniforme in $[0,1]$.
- Data una V.C. X uniforme in $[0, \pi]$, risulta $E[\sin(X)] = 2/\pi$.
- Siano X ed Y le coordinate di un punto scelto in modo equiprobabile in un rettangolo con lati paralleli agli assi coordinati. Allora, X ed Y sono incorrelate.
- Dato un numero reale α , risulta $E[(X-\alpha)^2] = (E[X]-\alpha)^2 + \sigma^2_X$.
- Sia $V = aX+b$, $W = cX+d$ dove X e Y sono due V.C. incorrelate. Allora, V e W sono incorrelate.

V F

☒ ☐

1C. Dimostrare che, $\text{Var}[aX+bY] = a^2\text{Var}[X] + b^2\text{Var}[Y] + 2ab \text{Cov}[X,Y]$.

2C. Si considerino le V.C. X, Y , coordinate di un punto scelto in modo equiprobabile nel rombo disegnato in figura.



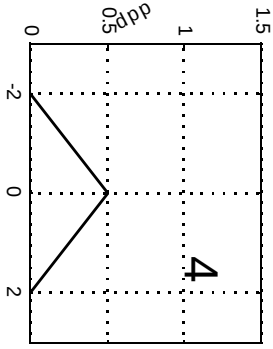
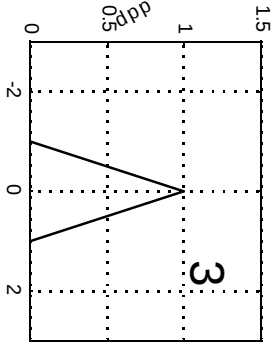
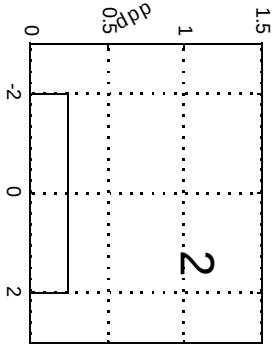
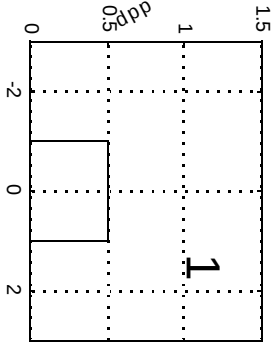
Scrivere sopra le figure delle densità di probabilità il numero della corrispondente densità.

1) $f_{X|Y}(x|Y=0)$

2) $f_{Y|X}(y|X=0)$

3) $f_X(x)$

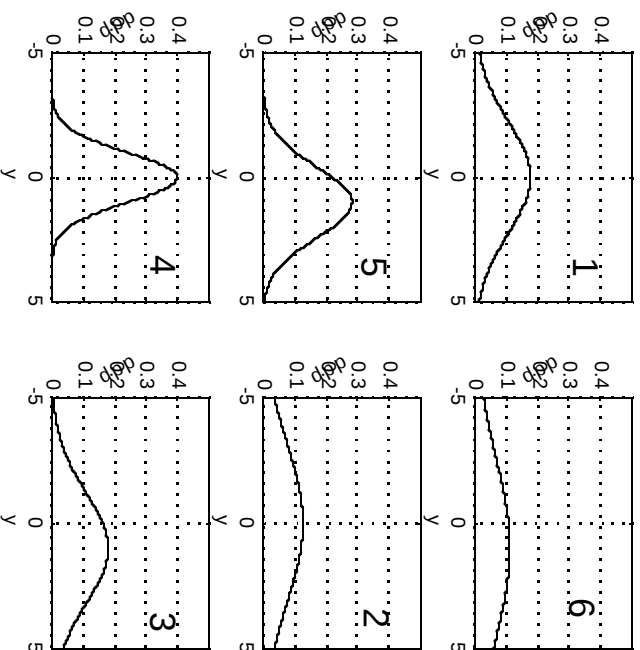
4) $f_Y(y)$



3C. Sia $Y = \alpha X + \beta Z + \gamma$, dove $X \sim N(0,2)$, $Z \sim N(0,1)$, $\text{Cov}[X,Z] = 1$. Si considerino le seguenti scelte per i parametri α, β, γ :

- | | | | | | |
|------------------|---------------|--------------|------------------|---------------|--------------|
| 1) $\alpha = 1,$ | $\beta = 1,$ | $\gamma = 0$ | 2) $\alpha = 1,$ | $\beta = 2,$ | $\gamma = 0$ |
| 3) $\alpha = 2,$ | $\beta = -1,$ | $\gamma = 1$ | 4) $\alpha = 1,$ | $\beta = -1,$ | $\gamma = 0$ |
| 5) $\alpha = 1,$ | $\beta = -2,$ | $\gamma = 1$ | 6) $\alpha = 2,$ | $\beta = 1,$ | $\gamma = 1$ |

Riportare sopra i seguenti grafici della densità di probabilità di Y il numero della corrispondente tripletta α, β, γ



4C. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false:
(Punteggio: risposta esatta = 1, errore = -1, non risponde = 0)

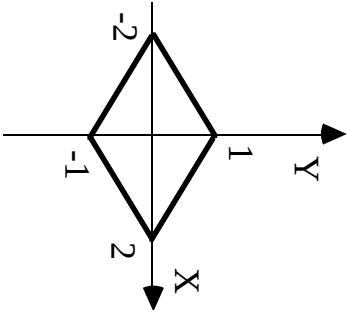
- Dati due eventi A e B , se $A = \{0\}$, allora A e B sono incompatibili e indipendenti.
- Dati tre eventi A, B, C tali che $P(BC) \neq 0$, risulta sempre $P(ABC) = P(A|BC)P(B|C)$.
- La probabilità di ottenere più di un successo in n prove di Bernoulli è pari a $1 - q^n - pq^{n-1}$.
- La somma di k variabili esponenziali indipendenti è una Erlang- k ed ha varianza pari a k/λ .
- Date due V.C. X, Y esponenziali i.i.d., la V.C. $V := X - Y$ non è distribuita come una Erlang-2.
- Data una V.C. X uniforme in $[-2,2]$, la V.C. $Y = |X|$ non è uniforme in $[0,2]$.
- Data una V.C. X uniforme in $[0, \pi]$, risulta $E[\sin(X)] = 4/\pi$.
- Siano X ed Y le coordinate di un punto scelto in modo equiprobabile in un rettangolo con lati paralleli agli assi coordinati. Allora, X ed Y sono incorrelate ma non indipendenti.
- Dato un numero reale α , risulta $E[(X-\alpha)^2] = -(E[X]-\alpha)^2 + \sigma^2_X$.
- Sia $V = aX+b$, $W = cX+d$ dove X e Y sono due V.C. indipendenti. Allora, V e W sono indipendenti.

V F

■ □

1D. Dato un vettore X di variabili casuali, dimostrare che la matrice varianza $\text{Var}[X]$ è semidefinita positiva.

2D. Si considerino le V.C. X, Y , coordinate di un punto scelto in modo equiprobabile nel rombo disegnato in figura.



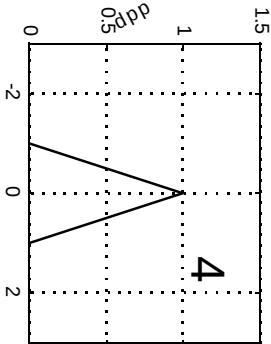
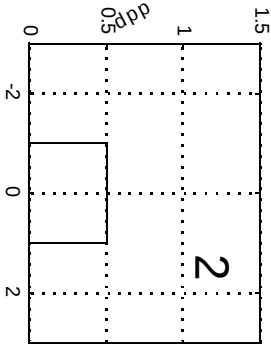
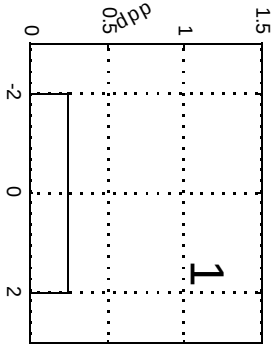
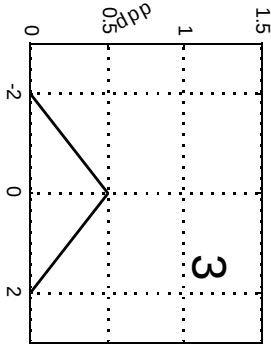
Scrivere sopra le figure delle densità di probabilità il numero della corrispondente densità.

1) $f_{X|Y}(x|Y=0)$

2) $f_{Y|X}(y|X=0)$

3) $f_X(x)$

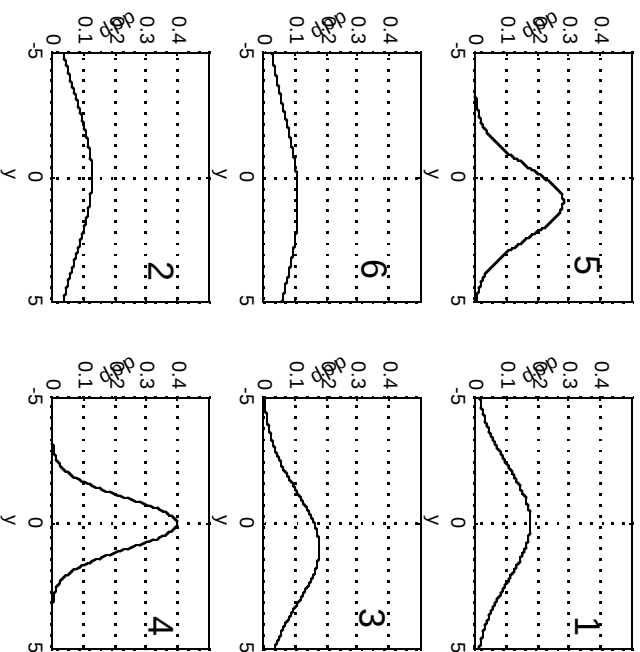
4) $f_Y(y)$



3D. Sia $Y = \alpha X + \beta Z + \gamma$, dove $X \sim N(0,2)$, $Z \sim N(0,1)$, $\text{Cov}[X,Z] = 1$. Si considerino le seguenti scelte per i parametri α, β, γ :

- | | | | | | |
|-------------------|----------------|--------------|-------------------|----------------|--------------|
| 1) $\alpha = 1$, | $\beta = 1$, | $\gamma = 0$ | 2) $\alpha = 1$, | $\beta = 2$, | $\gamma = 0$ |
| 3) $\alpha = 2$, | $\beta = -1$, | $\gamma = 1$ | 4) $\alpha = 1$, | $\beta = -1$, | $\gamma = 0$ |
| 5) $\alpha = 1$, | $\beta = -2$, | $\gamma = 1$ | 6) $\alpha = 2$, | $\beta = 1$, | $\gamma = 1$ |

Riportare sopra i seguenti grafici della densità di probabilità di Y il numero della corrispondente tripletta α, β, γ



4D. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false:
(Punteggio: risposta esatta = 1, errore = -1, non risponde = 0)

V F

- Dati due eventi A e B , se $A = \{0\}$, allora A e B sono incompatibili ma non indipendenti. ☐
- Dati tre eventi A, B, C tali che $P(BC) \neq 0$, risulta sempre $P(ABC) = P(A|B)P(B|C)P(C)$. ☐
- La probabilità di ottenere più di un successo in n prove di Bernoulli è pari a $1 - q^n$. ☐
- La somma di k variabili esponenziali indipendenti è una Erlang- k ed ha varianza pari a k^2/λ . ☐
- Date due V.C. X, Y esponenziali i.i.d., la V.C. $V := X + Y$ non è distribuita come una Erlang-2. ☐
- Data una V.C. X uniforme in $[-1,2]$, la V.C. $Y = |X|$ è uniforme in $[0,2]$. ☐
- Data una V.C. X uniforme in $[0,\pi]$, risulta $E[\sin(X)] = 3/\pi$. ☐
- Siano X ed Y le coordinate di un punto scelto in modo equiprobabile in un rettangolo con lati paralleli agli assi coordinati. Allora, X ed Y non sono indipendenti. ☐
- Dato un numero reale α , risulta $E[(X-\alpha)^2] = (E[X]+\alpha)^2 + \sigma^2_X$. ☐
- Sia $V = aX+b$, $W = cX+d$ dove X e Y sono due V.C. incorrelate. Allora, V e W sono indipendenti. ☐

1. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false:
(Punteggio: risposta esatta = 1, errore = -1, non risponde = 0)

V F

- a. Dati due eventi A e B, se $A = \{0\}$, allora A e B sono incompatibili.

☒ ☐

- b. Dati tre eventi A, B, C tali che $P(BC) \neq 0$, risulta sempre $P(ABC) = P(A|B)P(B|C)P(C)$.

☐ ☒

- c. La probabilità di ottenere più di un successo in n prove di Bernoulli è pari a $1 - q^n - nq^{n-1}$.

☐ ☒

- d. Dati tre eventi A, B, C tali che $A=B+C$, risulta sempre $P(A)=P(B)+P(C)$.

☐ ☒

- e. Sia $P(B) \neq 0$. Allora, gli eventi A e B sono indipendenti se e solo se $P(A|B) = P(A)$.

☒ ☐

2. Dire, motivando la risposta, quale dei seguenti eventi è più probabile:

A: lanciando un dado 4 volte esce "1" almeno una volta.

B: lanciando una coppia di dadi 24 volte esce un doppio "1" almeno una volta.

$$P(A) = 1 - (5/6)^4 = 0.5177$$

$$P(B) = 1 - (35/36)^{24} = 0.4914$$