

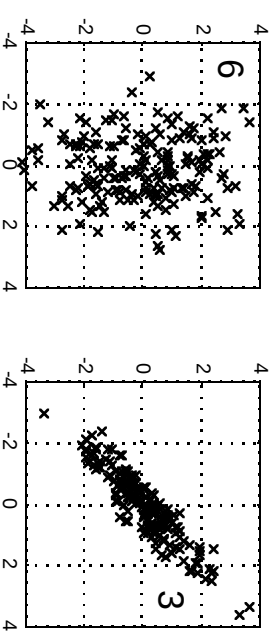
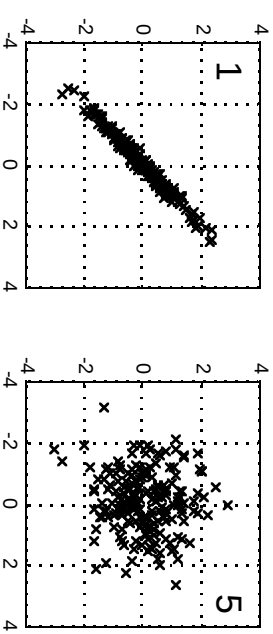
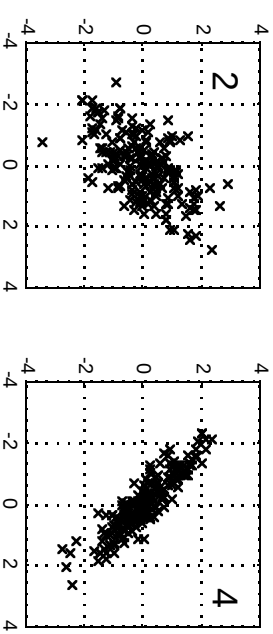
- 1A. Si consideri la media campionaria $\bar{X}_N$ delle V.C. i.i.d. X_i , $i = 1, \dots, N$, $E[X_i] = m$, $\text{Var}[X_i] = \sigma^2 < \infty$.

Ricavare, riportando i passaggi, l'espressione della media e della varianza di $\bar{X}_N$ e dimostrare che, per $N \rightarrow \infty$, la media campionaria converge in media quadratica alla media m .

- 2A. Date delle V.C. X e Y congiuntamente gaussiane con $E[X] = E[Y] = 0$, si considerino le seguenti triplette di varianze e covarianze:

- | | |
|---|---|
| 1) $\sigma_X^2 = 1, \sigma_Y^2 = 1, \sigma_{XY} = 0.99$ | 2) $\sigma_X^2 = 1, \sigma_Y^2 = 1, \sigma_{XY} = 0.5$ |
| 3) $\sigma_X^2 = 1, \sigma_Y^2 = 1, \sigma_{XY} = 0.9$ | 4) $\sigma_X^2 = 1, \sigma_Y^2 = 1, \sigma_{XY} = -0.9$ |
| 5) $\sigma_X^2 = 1, \sigma_Y^2 = 1, \sigma_{XY} = 0$ | 6) $\sigma_X^2 = 1, \sigma_Y^2 = 4, \sigma_{XY} = 0$ |

Riportare sopra i seguenti scatter plot il numero della corrispondente tripletta $\sigma_X^2, \sigma_Y^2, \sigma_{XY}$



3A. Si considerino i seguenti dati:

$$\begin{array}{lll} y_1 = 3 & y_2 = -2 & y_3 = 0.5 \\ t_1 = 0 & t_2 = 1 & t_3 = 2 \end{array}$$

Vengono presi in considerazione i seguenti modelli:

- 1) $y_k = \theta_1 \sin(\pi t_k / 2) + \theta_2 \cos(\pi t_k / 2) + v_k$
- 2) $y_k = \theta_1 + \theta_2 t_k + v_k$
- 3) $y_k = \theta_1 + \theta_2 t_k^2 + v_k$
- 4) $y_k = \theta_1 t_k + \theta_2 t_k^2 + v_k$

dove v_k sono errori di misura tra loro incorrelati con $E[v_k] = 0$, $\text{Var}[v_k] = 1$.

Si supponga di calcolare la stima del vettore θ dei parametri mediante lo stimatore di Gauss-Markov. Di seguito sono riportate le inverse delle matrici di covarianza dei parametri stimati per tutti e quattro i casi. Scrivere nelle caselle accanto alle matrici il numero del modello corrispondente.

$$\boxed{3} \quad (\text{Var}[\theta^M])^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 17 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{4} \quad (\text{Var}[\theta^M])^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 9 & 17 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{2} \quad (\text{Var}[\theta^M])^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{1} \quad (\text{Var}[\theta^M])^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

4A. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

(Punteggio: risposta esatta = 1, errore = -1, non risponde = 0)

V F

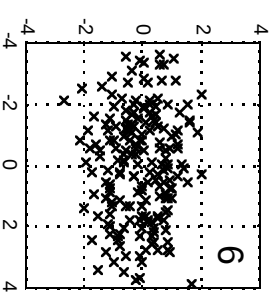
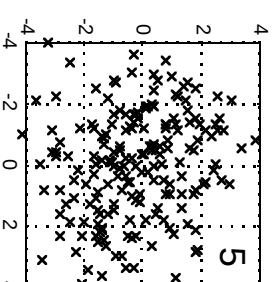
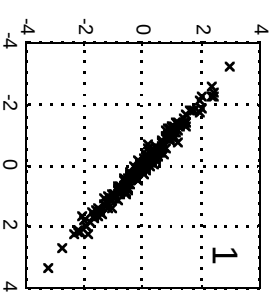
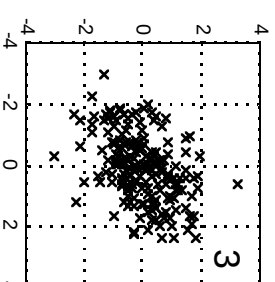
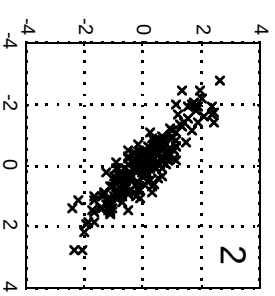
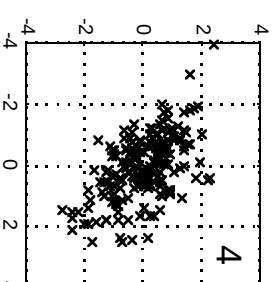
1. Dati tre eventi A, B, C tali che $A=B+C$, risulta sempre $P(B) < P(A)$. ☐
2. Dati degli eventi di Poisson, si indichi con X il numero di eventi nell'intervallo di durata T e con Y il numero di eventi in un intervallo di durata 2T. Allora, $E[Y] = 2E[X]$. ☐
3. Se $Y = X + b$, allora $f_Y(y) = f_X(y-b)$. ☐
4. Se $E[X] = 0$, allora $E[X^2] = \text{Var}[X]$. ☐
5. Date due V.C. X, Y incorrelate, risulta che $\text{Var}[aX-bY] = a^2\sigma_X^2 - b^2\sigma_Y^2$. ☐
6. Si consideri la media campionaria $\bar{X}_N$ delle V.C. i.i.d. X_i , $i = 1, \dots, N$, $X_i \sim N(m_X, \sigma_X^2)$. Allora, $P(|\bar{X}_N - m_X| \leq 1.96\sigma_X) = 0.95$. ☐
7. Si considerino delle V.C. i.i.d., ciascuna con con d.d.p. $f_X(x) = \lambda \exp(-\lambda x)$, $x \geq 0$, $f_X(x) = 0$, $x < 0$. Allora, la loro media campionaria è asintoticamente gaussiana e converge in probabilità a λ . ☐
8. Si consideri la media campionaria $\bar{X}_N$ delle V.C. i.i.d. X_i , $i = 1, \dots, N$, $X_i \sim N(m_X, \sigma_X^2)$. Allora, $\sqrt{N}(\bar{X}_N - m_X) / S_c$ è distribuita come una t di Student a N-1 gradi di libertà (S_c^2 è la varianza campionaria corretta). ☐
9. Sia $Y = \Phi\theta + V$, con $E[V] = 0$, e $\text{Var}[V] = \sigma^2\Psi$. Allora, lo stimatore di Gauss-Markov è dato da $\theta^M = (\Phi\Psi^{-1}\Phi)^{-1}\Phi^T Y$. ☐
10. Si consideri il modello $y_k = \theta x_k + v_k$, $k = 1, \dots, N$. Allora, la stima ai minimi quadrati di θ è $\theta_{LS} = \sum_{k=1}^N x_k^2 / \sum_{k=1}^N y_k x_k$. ☐

1B. Dimostrare che $E[(X - a)^2] = (E[X] - a)^2 + \text{Var}[X]$.

2B. Date delle V.C. X e Y congiuntamente gaussiane con $E[X] = E[Y] = 0$, si considerino le seguenti triplette di varianze e covarianze:

- | | |
|--|---|
| 1) $\sigma_X^2 = 1, \sigma_Y^2 = 1, \sigma_{XY} = -0.99$ | 2) $\sigma_X^2 = 1, \sigma_Y^2 = 1, \sigma_{XY} = -0.9$ |
| 3) $\sigma_X^2 = 1, \sigma_Y^2 = 1, \sigma_{XY} = 0.5$ | 4) $\sigma_X^2 = 1, \sigma_Y^2 = 1, \sigma_{XY} = -0.5$ |
| 5) $\sigma_X^2 = 4, \sigma_Y^2 = 4, \sigma_{XY} = 0$ | 6) $\sigma_X^2 = 4, \sigma_Y^2 = 1, \sigma_{XY} = 0$ |

Riportare sopra i seguenti scatter plot il numero della corrispondente tripletta $\sigma_X^2, \sigma_Y^2, \sigma_{XY}$



3B. Si considerino i seguenti dati:

$$\begin{array}{lll} y_1 = 3 & y_2 = -2 & y_3 = 0.5 \\ t_1 = 0 & t_2 = 1 & t_3 = -2 \end{array}$$

Vengono presi in considerazione i seguenti modelli:

- 1) $y_k = \theta_1 \sin(\pi t_k / 2) + \theta_2 \cos(\pi t_k / 2) + v_k$
- 2) $y_k = \theta_1 + \theta_2 t_k + v_k$
- 3) $y_k = \theta_1 + \theta_2 t_k^2 + v_k$
- 4) $y_k = \theta_1 t_k + \theta_2 t_k^2 + v_k$

dove v_k sono errori di misura tra loro incorrelati con $E[v_k] = 0$, $\text{Var}[v_k] = 1$.

Si supponga di calcolare la stima del vettore θ dei parametri mediante lo stimatore di Gauss-Markov. Di seguito sono riportate le inverse delle matrici di covarianza dei parametri stimati per tutti e quattro i casi. Scrivere nelle caselle accanto alle matrici il numero del modello corrispondente.

1 $(\text{Var}[\theta^M])^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

3 $(\text{Var}[\theta^M])^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 17 \end{bmatrix}$

2 $(\text{Var}[\theta^M])^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$

4 $(\text{Var}[\theta^M])^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & -7 \\ -7 & 17 \end{bmatrix}$

4B. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

(Punteggio: risposta esatta = 1, errore = -1, non risponde = 0)

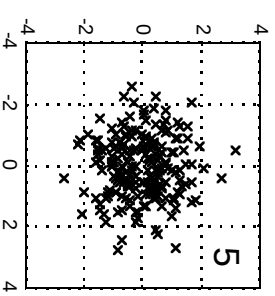
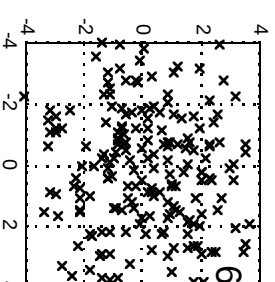
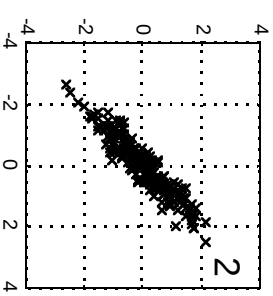
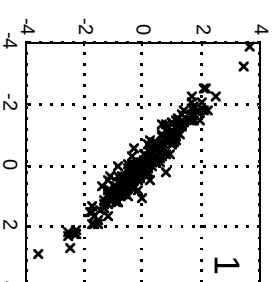
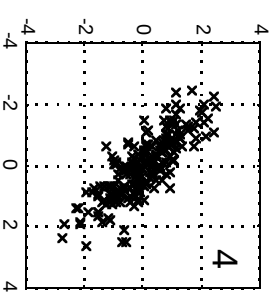
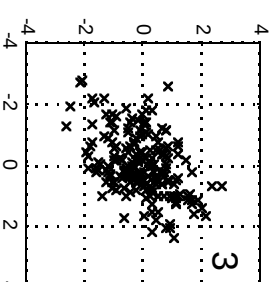
- | | | |
|--|-------------------------------------|-------------------------------------|
| | V | F |
| 1. Dati tre eventi A, B, C tali che $A=B+C$, risulta sempre $P(B) \leq P(A)$. | ☒ | ☐ |
| 2. Dati degli eventi di Poisson, si indichi con X il numero di eventi nell'intervallo di durata T e con Y il numero di eventi in un intervallo di durata 2T. Allora, $E[Y] \neq 2E[X]$. | ☐ | ☒ |
| 3. Se $Y = X + b$, allora $f_Y(y) = f_X(y+b)$. | ☐ | ☒ |
| 4. Se $E[X^2] = 0$, allora $E[X]^2 = \text{Var}[X]$. | ☒ | ☐ |
| 5. Date due V.C. X, Y indipendenti, risulta che $\text{Var}[aX+bY] = a^2\sigma_X^2 + b^2\sigma_Y^2$. | ☐ | ☒ |
| 6. Si consideri la media campionaria $\bar{X}_N$ delle V.C. i.i.d. X_i , $i = 1, \dots, N$, $X_i \sim N(m_X, \sigma_X^2)$. Allora, $P(\bar{X}_N - m_X \leq 1.96\sigma_X/\sqrt{N}) = 0.95$. | ☒ | ☐ |
| 7. Si considerino delle V.C. i.i.d., ciascuna con con d.d.p. $f_X(x) = \lambda \exp(-\lambda x)$, $x \geq 0$, $f_X(x) = 0$, $x < 0$. Allora, la loro media campionaria è asintoticamente gaussiana e converge in probabilità a $1/\lambda$. | ☒ | ☐ |
| 8. Si consideri la media campionaria $\bar{X}_N$ delle V.C. i.i.d. X_i , $i = 1, \dots, N$, $X_i \sim N(m_X, \sigma_X^2)$. Allora, $\sqrt{N}(\bar{X}_N - m_X)/S_c$ è distribuita come una t di Student a N gradi di libertà (S_c^2 è la varianza campionaria corretta). | ☐ | ☒ |
| 9. Sia $Y = \Phi\theta + V$, con $E[V] = 0$, e $\text{Var}[V] = \sigma^2\Psi$. Allora, lo stimatore di Gauss-Markov è dato da $\theta^M = (\Phi^T\Psi^{-1}\Phi)^{-1}\Phi^T\Psi^{-1}Y$. | ☒ | ☐ |
| 10. Si consideri il modello $y_k = \theta x_k + v_k$, $k = 1, \dots, N$. Allora, la stima ai minimi quadrati di θ è $\theta^{LS} = \sum_{k=1}^N y_k x_k / \sum_{k=1}^N x_k^2$ | ☒ | ☐ |

- 1C. Si consideri il modello $Y = \Phi\theta + V$, $\text{rank}(\Phi) = q$, dove q è la dimensione del vettore θ dei parametri. Ricavare l'espressione dello stimatore ai minimi quadrati (non è richiesta la dimostrazione dell'unicità).

- 2C. Date delle V.C. X e Y congiuntamente gaussiane con $E[X] = E[Y] = 0$, si considerino le seguenti triplette di varianze e covarianze:

- | | |
|--|---|
| 1) $\sigma_X^2 = 1, \sigma_Y^2 = 1, \sigma_{XY} = -0.95$ | 2) $\sigma_X^2 = 1, \sigma_Y^2 = 1, \sigma_{XY} = 0.95$ |
| 3) $\sigma_X^2 = 1, \sigma_Y^2 = 1, \sigma_{XY} = 0.4$ | 4) $\sigma_X^2 = 1, \sigma_Y^2 = 1, \sigma_{XY} = -0.8$ |
| 5) $\sigma_X^2 = 1, \sigma_Y^2 = 1, \sigma_{XY} = 0$ | 6) $\sigma_X^2 = 4, \sigma_Y^2 = 4, \sigma_{XY} = 0$ |

Riportare sopra i seguenti scatter plot il numero della corrispondente tripletta $\sigma_X^2, \sigma_Y^2, \sigma_{XY}$



3C. Si considerino i seguenti dati:

$$\begin{array}{ccc} y_1 = 3 & y_2 = -2 & y_3 = 0.5 \\ t_1 = 0 & t_2 = -1 & t_3 = 2 \end{array}$$

Vengono presi in considerazione i seguenti modelli:

- 1) $y_k = \theta_1 \sin(\pi t_k / 2) + \theta_2 \cos(\pi t_k / 2) + v_k$
- 2) $y_k = \theta_1 + \theta_2 t_k + v_k$
- 3) $y_k = \theta_1 + \theta_2 t_k^2 + v_k$
- 4) $y_k = \theta_1 t_k + \theta_2 t_k^2 + v_k$

dove v_k sono errori di misura tra loro incorrelati con $E[v_k] = 0$, $\text{Var}[v_k] = 1$.

Si supponga di calcolare la stima del vettore θ dei parametri mediante lo stimatore di Gauss-Markov. Di seguito sono riportate le inverse delle matrici di covarianza dei parametri stimati per tutti e quattro i casi. Scrivere nelle caselle accanto alle matrici il numero del modello corrispondente.

3

$$(\text{Var}[\theta^M])^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 17 \end{bmatrix}$$

2

$$(\text{Var}[\theta^M])^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

1

$$(\text{Var}[\theta^M])^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

4

$$(\text{Var}[\theta^M])^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 7 & 17 \end{bmatrix}$$

4C. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false:
(Punteggio: risposta esatta = 1, errore = -1, non risponde = 0)

V F

1. Dati tre eventi A, B, C tali che $A=B+C$, risulta sempre $P(A) \leq P(B)+P(C)$.

☒ ☐

2. Dati degli eventi di Poisson, si indichi con X il numero di eventi nell'intervallo di durata T e con Y il numero di eventi in un intervallo di durata 2T. Allora, $E[Y] = \sqrt{2E[X]}$.

☐ ☒

3. Se $Y = aX$, $a > 0$, allora $f_Y(y) = f_X(y/a)$.

☐ ☒

4. Se $\text{Var}[X] = 0$, allora $E[X^2] = E[X]^2$.

☒ ☐

5. Date due V.C. X,Y incorrelate, risulta che $\text{Var}[aX+bY] = a^2\sigma_X^2 + b^2\sigma_Y^2$.

☒ ☐

6. Si consideri la media campionaria $\bar{X}_N$ delle V.C. i.i.d. X_i , $i = 1, \dots, N$, $X_i \sim N(m_X, \sigma_X^2)$. Allora, $P(|\bar{X}_N - m_X| \leq 1.96\sqrt{N}\sigma_X) = 0.95$.

☐ ☒

7. Si considerino delle V.C. i.i.d., ciascuna con con d.d.p. $f_X(x) = \lambda \exp(-\lambda x)$, $x \geq 0$, $f_X(x) = 0$, $x < 0$. Allora, la loro media campionaria è asintoticamente gaussiana e converge in media quadratica a λ .

☐ ☒

8. Si consideri la media campionaria $\bar{X}_N$ delle V.C. i.i.d. X_i , $i = 1, \dots, N$, $X_i \sim N(m_X, \sigma_X^2)$. Allora, $\sqrt{N}(\bar{X}_N - m_X)/S$ è distribuita come una t di Student a N-1 gradi di libertà (S^2 è la varianza campionaria non corretta).

☐ ☒

9. Sia $Y = \Phi\theta + V$, con $E[Y] = 0$, e $\text{Var}[Y] = \sigma^2\Psi$. Allora, lo stimatore di Gauss-Markov è dato da $\theta^M = (\Phi^T\Phi)^{-1}\Phi^T\Psi^{-1}Y$.

☐ ☒

10. Si consideri il modello $y_k = \theta x_k + v_k$, $k = 1, \dots, N$. Allora, la stima ai minimi quadrati di θ è $\theta^{LS} = \sum_{k=1}^N y_k x_k / \sum_{k=1}^N y_k^2$

☐ ☒

1D. Ricavare, riportando i passaggi, valor medio e varianza della $V.C.$ di Bernoulli

$f_X(x)=(1-p)\delta(x)+p\delta(x-1), 0 \leq p \leq 1$.

2D. Date delle $V.C.$ X e Y congiuntamente gaussiane con $E[X] = E[Y] = 0$, si considerino le seguenti triplette di varianze e covarianze:

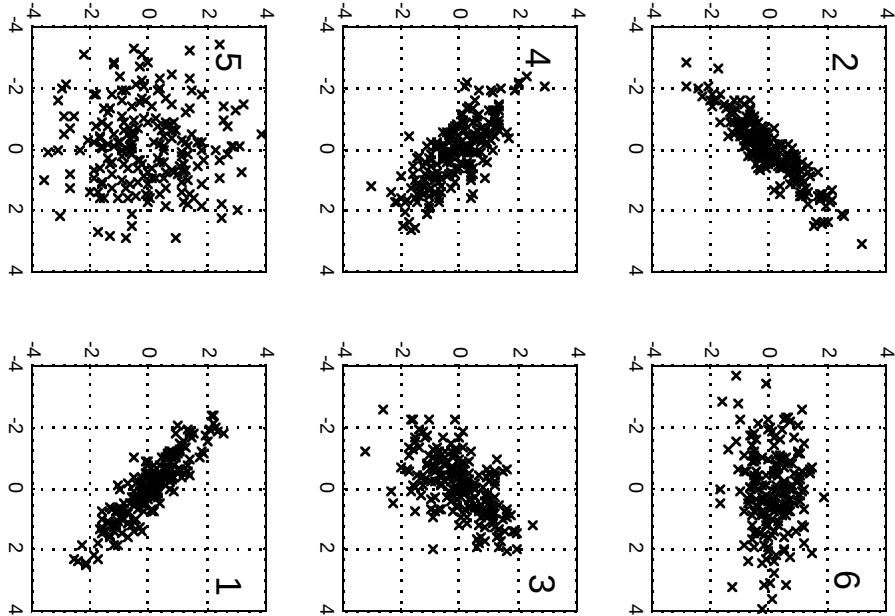
- 1) $\sigma_X^2 = 1, \sigma_Y^2 = 1, \sigma_{XY} = -0.9$

2) $\sigma_X^2 = 1, \sigma_Y^2 = 1, \sigma_{XY} = 0.9$
- 3) $\sigma_X^2 = 1, \sigma_Y^2 = 1, \sigma_{XY} = 0.6$

4) $\sigma_X^2 = 1, \sigma_Y^2 = 1, \sigma_{XY} = -0.7$
- 5) $\sigma_X^2 = 2, \sigma_Y^2 = 2, \sigma_{XY} = 0$

6) $\sigma_X^2 = 2, \sigma_Y^2 = 0.5, \sigma_{XY} = 0$

Riportare sopra i seguenti scatter plot il numero della corrispondente tripletta $\sigma_X^2, \sigma_Y^2, \sigma_{XY}$



3D. Si considerino i seguenti dati:

$$\begin{array}{ccc} y_1 = 3 & y_2 = -2 & y_3 = 0.5 \\ t_1 = 0 & t_2 = -1 & t_3 = -2 \end{array}$$

Vengono presi in considerazione i seguenti modelli:

- 1) $y_k = \theta_1 \sin(\pi t_k / 2) + \theta_2 \cos(\pi t_k / 2) + v_k$
- 2) $y_k = \theta_1 + \theta_2 t_k + v_k$
- 3) $y_k = \theta_1 + \theta_2 t_k^2 + v_k$
- 4) $y_k = \theta_1 t_k + \theta_2 t_k^2 + v_k$

dove v_k sono errori di misura tra loro incorrelati con $E[v_k] = 0$, $\text{Var}[v_k] = 1$.

Si supponga di calcolare la stima del vettore θ dei parametri mediante lo stimatore di Gauss-Markov. Di seguito sono riportate le inverse delle matrici di covarianza dei parametri stimati per tutti e quattro i casi. Scrivere nelle caselle accanto alle matrici il numero del modello corrispondente.

4

$$(\text{Var}[\theta^M])^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & -9 \\ -9 & 17 \end{bmatrix}$$

1

$$(\text{Var}[\theta^M])^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

3

$$(\text{Var}[\theta^M])^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 17 \end{bmatrix}$$

2

$$(\text{Var}[\theta^M])^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$$

4D. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false:
(Punteggio: risposta esatta = 1, errore = -1, non risponde = 0)

V F

1. Dati tre eventi A, B, C tali che $A=B+C$, risulta sempre $P(A)=P(B)+P(C)-P(BC)$.

■ □

2. Dati degli eventi di Poisson, si indichi con X il numero di eventi nell'intervallo di durata T e con Y il numero di eventi in un intervallo di durata 2T. Allora, $\text{Var}[Y]=2\text{Var}[X]$.

■ □

3. Se $Y = aX$, $a > 0$, allora $f_Y(y) = f_X(y/a)/a$.

■ □

4. Se $E[X]^2 = E[X^2]$, allora $\text{Var}[X] = 0$.

■ □

5. Date due V.C. X,Y incorrelate, risulta che $\text{Var}[aX+bY] = a^2\sigma_X^2 + b^2\sigma_Y^2$.

■ □

6. Si consideri la media campionaria $\bar{X}_N$ delle V.C. i.i.d. X_i , $i = 1, \dots, N$, $X_i \sim N(m_X, \sigma_X^2)$. Allora, $P(|\bar{X}_N - m_X| \leq 1.96\sigma_X/\sqrt{N}) = 0.975$.

■ □

7. Si considerino delle V.C. i.i.d., ciascuna con con d.d.p. $f_X(x) = \lambda \exp(-\lambda x)$, $x \geq 0$, $f_X(x) = 0$, $x < 0$. Allora, la loro media campionaria è asintoticamente gaussiana e converge in media quadratica a $1/\lambda$.

■ □

8. Si consideri la media campionaria $\bar{X}_N$ delle V.C. i.i.d. X_i , $i = 1, \dots, N$, $X_i \sim N(m_X, \sigma_X^2)$. Allora, $(\bar{X}_N - m_X)/(\sqrt{N}\sigma_X)$ è distribuita come una t di Student a N-1 gradi di libertà (S_c^2 è la varianza campionaria corretta).

■ □

9. Sia $Y = \Phi\theta + V$, con $E[V] = 0$, e $\text{Var}[V] = \sigma^2\Psi$. Allora, lo stimatore di Gauss-Markov è dato da $\theta^M = (\Phi^T\Psi\Phi)^{-1}\Phi^T\Psi Y$.

■ □

10. Si consideri il modello $y_k = \theta x_k + v_k$, $k = 1, \dots, N$. Allora, la stima ai minimi quadrati di θ è $\theta_{LS} = \sum_{k=1}^N y_k^2 / \sum_{k=1}^N y_k x_k$

■ □