1 Ingredienti base del CDP

2 Definizioni classica e frequentista

3 Definizione assiomatica

4 La σ-algebra $\mathcal{F}$

5 Esiti equiprobabili

6 Esperimento casuale

7 Probabilità condizionata

Ingredienti base del CDP

eventi $\Longleftrightarrow$ insiemi $\qquad A, B, C, \ldots$

- Indichiamo con $\mathcal{S}$ l'insieme degli esiti di un esperimento.
  Es. Lancio del dado $\mathcal{S} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- L'evento è un sottoinsieme di $\mathcal{S}$.
  Es. Lancio del dado: $A = \{n.\ pari\} = \{2, 4, 6\}$.
  L'evento è rappresentato da tutto ciò su cui si può scommettere.
- Unione di eventi: evento che consiste nel verificarsi di almeno uno degli eventi considerati ($A + B$ o $A \cup B$).
- Intersezione di eventi: evento che consiste nel verificarsi di tutti gli eventi considerati (AB o $A \cap B$).
  Se l'intersezione è vuota gli eventi si dicono icompatibili o disgiunti.

Ingredienti base del CDP

- Evento certo: evento che si verifica con certezza.
- Evento impossibile: evento che non si verifica mai.
- Evento negato $\bar{A}$: evento che si verifica quando non si verifica A (è il complementare di A).

Es. Lancio del dado. Consideriamo gli eventi

$$A = \{n.\ pari\} = \{2, 4, 6\} \qquad B = \{n.\ > 3\} = \{4, 5, 6\}$$

$A + B = \{n.\ pari\ o\ > 3\} = \{2, 4, 5, 6\}$
$AB = \{n.\ pari > 3\} = \{4, 6\}$
$\bar{A} = \{n.\ dispari\} = \{1, 3, 5\}$
Dato l'evento $C = \{n.\ < 2\} = \{1\}$, si ha
$AC = \emptyset \Rightarrow A$ e C incompatibili o disgiunti.

Definizione classica

$$P(A) = \frac{\text{n. esiti favorevoli ad } A}{\text{n. esiti possibili}}$$

nel caso di esiti equiprobabili.
Definizione a carattere tautologico!
È una regola utile per calcolare la probabilità quando si dispone di un n. finito di alternative che possono essere considerate equiprobabili.
Tipico esempio di applicazione: giochi di dadi, di carte, ecc.

Es. Lancio del dado.
$A = \{n.\ pari\} = \{2, 4, 6\} \Rightarrow P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$
assumendo che il dado non sia truccato.

Definizione frequentista

"La probabilità di un evento è il limite della frequenza relativa dei successi (cioè delle prove in cui l'evento si verifica) quando il n. delle prove tende all'infinito".

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{n_A}{n}$$

In questo caso occorre che l'evento sia ripetibile nelle stesse condizioni.
Non sempre questo è possibile, per questo è stata introdotta la definizione assiomatica.

Es. Si osservano 1000 nascite: 526 maschi e 474 femmine. Qual è la probabilità di nascita di un maschio? $\frac{526}{1000}$.

Insieme $\mathcal{F}$ degli eventi

$\mathcal{F}$ è una classe di sottoinsiemi di $\mathcal{S}$ che gode delle seguenti proprietà

- chiusa rispetto alla negazione: se $A \in \mathcal{F} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{F}$
  Es. Lancio del dado. Se $A = \{2, 4, 6\} \in \mathcal{F}$
  $\Rightarrow \bar{A} = \{1, 3, 5\} \in \mathcal{F}$.
- chiusa rispetto all'unione: se $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A + B \in \mathcal{F}$
  Es. Se $A = \{2, 4, 6\} \in \mathcal{F}$ e $B = \{4, 5, 6\} \in \mathcal{F}$
  $\Rightarrow A + B = \{2, 4, 5, 6\} \in \mathcal{F}$.

Osserviamo che

- se $A \in \mathcal{F}$ e $B \in \mathcal{F} \Rightarrow AB \in \mathcal{F}$
- $\emptyset, \mathcal{S} \in \mathcal{F}$

Def. assiomatica di probabilità

$$P(\cdot) : \mathcal{F} \longrightarrow [0, 1]$$

La probabilità è una funzione definita sulla classe $\mathcal{F}$ e che associa ad ogni elemento di $\mathcal{F}$ un valore reale in modo tale che

- $0 \leq P(A) \leq 1$
- $P(\mathcal{S}) = 1$
- se $AB = \emptyset \Rightarrow P(A + B) = P(A) + P(B)$

Def. del 1933 dovuta al matematico russo Kolmogorov.
Es. Lancio della moneta. Esiti: $T, C \Rightarrow \mathcal{S} = \{T, C\}$.
$\mathcal{F} = \{\emptyset, \{T\}, \{C\}, \{T, C\}\}$
La def. data non permette di assegnare all'evento $\{T\}$ nessun valore preciso.

Proprietà derivanti dagli assiomi

- $P(A) + P(\bar{A}) = 1 \Rightarrow P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
- $P(\emptyset) = 0$
- $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$
- $A_1, A_2, ..., A_n$ eventi disgiunti, allora $P(A_1 + A_2 + ... + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n)$
- $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

Esercizio

Calcolare la probabilità, nel lancio di un dado non truccato, dell'uscita di un n. pari o < 3. Definiamo

$$A = \{n.\ pari\} = \{2, 4, 6\} \qquad B = \{n. < 3\} = \{1, 2\}$$

Sappiamo che $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

$$P(A) = \frac{n.\ esiti\ favorevoli}{n.\ esiti\ possibili} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \qquad P(AB) = P(\{2\}) = \frac{1}{6}$$

Segue che

$$P(A + B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3}.$$

Esperimenti con infiniti esiti

Se considero l'esperimento dell'estrazione di un numero casuale tra 0 e 1, l'insieme $\mathcal{S}$ degli esiti comprende infiniti valori.
In questo caso occorre estendere la definizione di $\mathcal{F}$:

- dati gli eventi $A_i \in \mathcal{F}$ $i = 1, 2, ..., \infty$, allora $\sum_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

Se $\mathcal{F}$ è chiusa rispetto alla negazione e all'unione numerabile si dice σ-algebra.
Nel caso di infiniti esiti è necessario modificare il terzo assioma nella definizione di probabilità:

- se A_i $i = 1, 2, ..., \infty$ sono eventi disgiunti, allora $P\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.
  Questa proprietà è detta σ-additività.

Spazio degli esiti equiprobabili

- Cardinalità finita: sia $\mathcal{S} = \{s_1, s_2, ..., s_n\}$ (s_i evento elementare).
  $\mathcal{S}$ è detto equiprobabile se, dato un evento A, composto dall'unione di τ_A eventi elementari, si ha
  $$P(A) = \frac{\tau_A}{n}.$$
- Cardinalità infinita. $\mathcal{S}$ è equiprobabile se valgono:
  - su $\mathcal{S}$ è definita una misura geometrica, quale lunghezza, area, volume, ecc.
  - la misura geometrica di $\mathcal{S}$ è non nulla $\Rightarrow m(\mathcal{S}) \neq 0$
  - dato un evento A: $P(A) = \frac{m(A)}{m(\mathcal{S})}$.

Esempio con cardinalità infinita

$\mathcal{S} = \{quadrato\ lato\ unitario\} = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1\}$
Sia

$$A = \{(x, y) : (x, y) \in \mathcal{S}, y \geq x\}.$$

L'esperimento casuale consiste nell'estrarre un punto qualsiasi del quadrato.
Qual è la probabilità che il punto appartenga ad A?

Se consideriamo equiprobabili tutti i punti del quadrato, allora

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\mathcal{S})} = \frac{area(A)}{area(\mathcal{S})} = \frac{1/2}{1} = \frac{1}{2}.$$

Esempio con cardinalità infinita

$\mathcal{S} = \{quadrato\ lato\ unitario\} = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1\}$
Sia

$$A = \{(x, y) : (x, y) \in \mathcal{S}, y = x\}.$$

A è l'insieme dei punti sulla diagonale.
Se i punti del quadrato sono equiprobabili, allora

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\mathcal{S})} = \frac{area(A)}{area(\mathcal{S})} = \frac{0}{1} = 0.$$

I punti della diagonale sono infiniti, ma sono di una infinità superiore i punti del quadrato.
Si ha anche $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1$, cioè la probabilità di estrarre un punto che sta nel quadrato, esclusa la diagonale, è 1.

Eventi certi e impossibili

Dall'ultimo esempio si possono trarre alcune conclusioni:

- L'evento certo ha probabilità 1, ma ci sono eventi non certi con probabilità 1;
- l'evento impossibile ha probabilità 0, ma ci sono eventi con probabilità 0 che sono possibili.

Spazio di probabilità

Un esperimento casuale è caratterizzato da tre elementi:

- insieme $\mathcal{S}$ degli esiti
- σ-algebra $\mathcal{F}$ degli eventi
- legge di probabilità $P(\cdot)$ definita su $\mathcal{F}$
  - $0 \leq P(A) \leq 1$
  - $P(\mathcal{S}) = 1$
  - $A_i, \; i = 1, 2, ..., \infty$ disgiunti $\Rightarrow P\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

$(\mathcal{S}, \mathcal{F}, P)$ si dice spazio di probabilità.

Esempio

$\mathcal{F}$ è, in genere, l'insieme di tutti i sottoinsiemi di $\mathcal{S}$. In certi casi si può scegliere una classe più piccola.

Consideriamo il lancio del dado.

$$\mathcal{S} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Cerchiamo la più piccola famiglia di eventi $\mathcal{F}$, chiusa rispetto a negazione e unione, che contiene gli eventi

$$\{n.\ pari\} = \{2, 4, 6\} \text{ e } \{n.\ dispari\} = \{1, 3, 5\}.$$

Si ha che

$$\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1, 3, 5\}, \{2, 4, 6\}, \mathcal{S}\}.$$

Supponendo che il dado non sia truccato, abbiamo che:

$$P(\emptyset) = 0 \qquad P(\mathcal{S}) = 1$$

$$P(\{1, 3, 5\}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \qquad P(\{2, 4, 6\}) = \frac{1}{2}$$

Probabilità condizionata

Il verificarsi di un evento può modificare il grado di incertezza di un altro evento.

Es. La probabilità di pescare un asso di picche da un mazzo regolare di 52 carte è $1/52$. Se sappiamo che la carta pescata è nera, allora la probabilità è $1/26$.

Siano A e M due eventi, con $P(M) \neq 0$. La probabilità di A condizionata da M è definita da

$$P(A|M) := \frac{P(AM)}{P(M)}$$

Spesso si utilizza la formula $P(AM) = P(A|M)P(M)$ nota come legge delle probabilità composte.

Esempio

1) Calcolare la probabilità che nel lancio di un dado si ottenga un n. ≤ 3 sapendo che si ottiene un n. pari.

$M = \{n.\ pari\} \qquad A = \{1, 2, 3\}$

$$P(A|M) = \frac{P(AM)}{P(M)} = \frac{P(\{2\})}{P(\{2,4,6\})} = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3}$$

2) Una scatola contiene 3 sfere bianche e 2 rosse. Si estraggono in successione, senza reimmissione, 2 sfere. Qual è la probabilità che la prima sia bianca e la seconda rossa?

$B_1 = \{prima\ sfera\ bianca\} \qquad R_2 = \{seconda\ sfera\ rossa\}$

$$P(B_1) = \frac{3}{5} \qquad P(R_2|B_1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Per la legge delle probabilità composte:

$$P(B_1 R_2) = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{10}$$