Legge delle alternative

Se $M_1, M_2, ..., M_n$ sono eventi disgiunti con $\sum_{i=1}^{n} M_i = \mathcal{S}$, allora, dato un evento A, si ha

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|M_i)P(M_i)$$

Es. Esame universitario.
$A = \{\text{esame superato}\}$
$M_1 = \{\text{studente interrogato dal docente}\}$
$M_2 = \{\text{studente interrogato dal ricercatore}\}$
Si sa che $P(A|M_1) = 0.5 \qquad P(A|M_2) = 0.75$
$P(M_1) = 0.8 \qquad P(M_2) = 1 - P(M_1) = 0.2$
Da cui $P(A) = P(A|M_1)P(M_1) + P(A|M_2)P(M_2)$
$= 0.5 \cdot 0.8 + 0.75 \cdot 0.2 = 0.55$

Teorema di Bayes

- $$P(M|A) = \frac{P(A|M)P(M)}{P(A)}$$
- Dati $M_1, M_2, ..., M_n$ eventi disgiunti con $\sum_{i=1}^{n} M_i = \mathcal{S}$
$$P(M_i|A) = \frac{P(A|M_i)P(M_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A|M_j)P(M_j)}$$

Dim.

$$P(M|A) = \frac{P(AM)}{P(A)} = \frac{P(A|M)P(M)}{P(A)}$$

Per il secondo punto è sufficiente applicare la legge delle alternative al denominatore.

Esempio

Si hanno 10 monete di cui 9 normali e una truccata con 2 teste. Si estrae una moneta a caso e senza guardarla si lancia una volta ottenendo testa. Qual è la probabilità che la moneta estratta sia quella truccata?

$A = \{$ è uscita testa$\}$

$M = \{$la moneta estratta è truccata$\}$

$$P(M|A) = \frac{P(A|M)P(M)}{P(A)} = \frac{P(A|M)P(M)}{P(A|M)P(M) + P(A|\bar{M})P(\bar{M})}$$

$P(M) = \frac{1}{10} \Rightarrow P(\bar{M}) = \frac{9}{10}$

$P(A|M) = 1 \qquad P(A|\bar{M}) = \frac{1}{2}$

$$P(M|A) = \frac{1 \cdot 1/10}{1 \cdot 1/10 + 1/2 \cdot 9/10} = \frac{2}{11}$$

Es. rilevamento di guasti

Analizziamo i guasti di un impianto.

$$M = \{guasto\} \text{ e } A = \{allarme\}$$

Supponiamo che in caso di guasto dell'impianto, l'allarme scatti con probabilità 0.9.

In assenza di guasto la probabilità di allarme è 0.2.

La probabilità di guasto è 0.05.

Sapendo che è scattato l'allarme, qual è la probabilità di avere un guasto?

$$\begin{array}{ccc} P(A|M) = 0.9 & & P(A|\bar{M}) = 0.2 \\ P(M) = 0.05 & \Rightarrow & P(\bar{M}) = 0.95 \end{array}$$

Per il teorema di Bayes

$$P(M|A) = \frac{P(A|M)P(M)}{P(A|M)P(M)+P(A|\bar{M})P(\bar{M})} = \frac{0.9 \cdot 0.05}{0.9 \cdot 0.05 + 0.2 \cdot 0.95} = 0.191$$

Indipendenza di due eventi

Due eventi A e B sono indipendenti se

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

Se A e B sono indipendenti, allora lo sono anche le coppie di eventi A e $\bar{B}$, $\bar{A}$ e B, $\bar{A}$ e $\bar{B}$.

Se A e B sono indipendenti, segue che

$$P(A|B) = P(A) \qquad P(B|A) = P(B).$$

Infatti, si ha

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B)}{P(B)}$$

Esempio 1

Un'urna contiene 5 sfere rosse e 3 sfere blu. Le sfere rosse sono numerate da 1 a 5 e le blu da 1 a 3. Si estrae una sfera dall'urna e si considerano gli eventi
$A = \{\text{estrazione di una pallina rossa}\}$
$B = \{\text{estrazione di una pallina con il n. 3}\}$
A e B sono indipendenti?

$$P(A) = \tfrac{5}{8} \qquad P(B) = \tfrac{2}{8}$$
$$P(AB) = P(\{\text{pallina rossa con n. 3}\}) = \tfrac{1}{8} \neq P(A)P(B) = \tfrac{5}{32}$$

A e B non sono indipendenti.

Se ci fossero 5 palline blu anziché 3, si avrebbe

$$P(A) = \tfrac{1}{2} \qquad P(B) = \tfrac{1}{5} \quad \text{e} \quad P(AB) = \tfrac{1}{10} = P(A)P(B)$$

quindi A e B sarebbero indipendenti.

Esempio 2

L'indipendenza non è una proprietà strutturale degli eventi, ma dipende dalla probabilità.
Es. Ci sono due urne. La prima contiene 1 pallina bianca, 1 rossa e 1 nera. La seconda contiene 1 pallina bianca, 1 rossa, 1 nera e 1 gialla. Sia
$B_1 = \{\text{estratta pallina bianca dalla prima urna}\}$
e analogamente gli altri eventi.
Gli eventi $E_1 = B_1 + R_1$ e $H_1 = B_1 + N_1$ sono indipendenti?
$P(E_1) = P(B_1) + P(R_1) = 1/3 + 1/3 = 2/3$
$P(H_1) = P(B_1) + P(N_1) = 1/3 + 1/3 = 2/3$
$P(E_1 H_1) = P(B_1) = 1/3 \neq P(E_1)P(H_1)$
E_1 e H_1 non sono indipendenti.
Sembra ovvio perché E_1 ed H_1 contengono entrambi B_1, ma non è così.

(segue)

Consideriamo gli eventi

$$E_2 = B_2 + R_2 \qquad H_2 = B_2 + N_2$$

Entrambi contengono B_2.

$$P(E_2) = P(B_2) + P(R_2) = 1/4 + 1/4 = 1/2$$

$$P(H_2) = P(B_2) + P(N_2) = 1/4 + 1/4 = 1/2$$

$$P(E_2 H_2) = P(B_2) = 1/4 = P(E_2)P(H_2)$$

Quindi E_2 e H_2 sono indipendenti.

Esempio 3

Consideriamo un dado non truccato e gli eventi

$$A = \{pari\} \qquad B = \{dispari\}$$

$AB = \emptyset \Rightarrow A$ e B sono disgiunti.

$$P(A) = 1/2 \qquad P(B) = 1/2 \qquad P(AB) = 0 \neq P(A)P(B)$$

A e B non sono indipendenti.

"Essere indipendenti" e "essere disgiunti" non sono equivalenti.

Indipendenza di più eventi

Supponiamo di avere 3 eventi: A_1, A_2, A_3.
Per avere l'indipendenza non basta richiedere

- $P(A_1 A_2 A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)$

Deve anche essere

- $P(A_1 A_2) = P(A_1)P(A_2)$
- $P(A_1 A_3) = P(A_1)P(A_3)$
- $P(A_2 A_3) = P(A_2)P(A_3)$

In generale, gli eventi A_1, A_2, ..., A_n, si dicono indipendenti se, comunque scelti k tra essi ($k \leq n$), A_{j_1}, A_{j_2}, ..., A_{j_k}, si ha che

$$P\left(A_{j_1} A_{j_2} \ldots A_{j_k}\right) = P\left(A_{j_1}\right) P\left(A_{j_2}\right) \ldots P\left(A_{j_k}\right)$$

Esempio 1

Consideriamo il lancio di 2 dadi.

$A = \{\text{lancio dispari con il primo dado}\}$
$B = \{\text{lancio dispari con il secondo dado}\}$
$C = \{\text{somma dei due dadi dispari}\}$

$P(A) = P(\{1,3,5\}) = 1/2 = P(B) \qquad P(C) = 1/2$
$P(AB) = P(\{\text{ottenere due n. dispari}\}) = 1/4 = P(A)P(B)$
$P(AC) = P(\{1^o \text{ dado dispari e } 2^o \text{ pari}\}) = 1/4 = P(A)P(C)$
$P(BC) = P(\{2^o \text{ dado dispari e } 1^o \text{ pari}\}) = 1/4 = P(B)P(C)$

$ABC = \emptyset$ perché la somma di due dispari è pari.
$P(ABC) = 0 \neq P(A)P(B)P(C)$
A, B e C non sono indipendenti.

Esempio 2

Si lanciano indipendentemente 3 monete regolari. Ci sono 8 possibili esiti.
$\mathcal{S} = \{TTT, TTC, TCT, CTT, TCC, CTC, CCT, CCC\}$.
Come $\mathcal{F}$ prendiamo l'insieme di tutti i sottoinsiemi di $\mathcal{S}$.
Consideriamo gli eventi
$A_1 = \{almeno\ 2\ T\}$
$A_2 = \{n.\ pari\ di\ T\}$
$A_3 = \{C\ sulla\ prima\ moneta\}$
$P(A_1) = 4/8 = 1/2 \qquad P(A_2) = 4/8 = 1/2 \qquad P(A_3) = 4/8 = 1/2$

$$P(A_1A_2A_3) = P(\{CTT\}) = 1/8 = P(A_1)P(A_2)P(A_3)$$

$P(A_1A_2) = P(\{TTC, TCT, CTT\}) = 3/8 \neq P(A_1)P(A_2)$
A_1, A_2 e A_3 non sono indipendenti.