

# IMAD – Laurea triennale

Requisiti preliminari di matematica: test di autovalutazione

Prof. Giancarlo Ferrari Trecate

## Funzioni

1. Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ -\frac{1}{2}x + 1 & x \in [0, 1] \\ 0 & x > 1 \end{cases}$$

Se ne disegni il grafico e da questo si deduca il grafico di  $f(-x)$  e di  $f(-2x + 1)$ .

Si determini l'insieme  $D_y = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \leq y\}$  al variare del parametro  $y$  in  $\mathbb{R}$ .

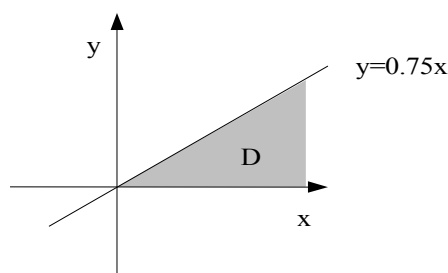
## Integrali

2. Sia  $z \in \mathbb{R}$ ,  $z > 0$ . Calcolare la funzione

$$g(z) = \int_0^{+\infty} \int_0^{zx} e^{-x-y} dy dx$$

3. Calcolare  $\int \int_D f(x)f(y) dx dy$  ove  $D$  è l'insieme in figura e

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$



4. Sia  $B((0, 0), 1) \subset \mathbb{R}^2$  la palla di centro  $(0, 0)$  e raggio unitario. Siano inoltre

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x, y) \in B((0, 0), 1) \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \quad \text{e} \quad g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy.$$

Dare un'interpretazione geometrica al valore  $g(0)$  e calcolare  $g(x)$ .

5. Siano

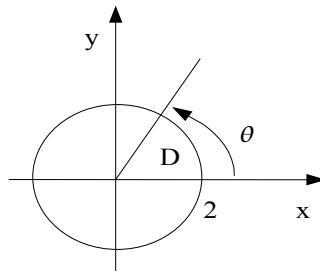
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{30} & x \in [30, 60] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \quad \text{e} \quad g(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y-x)f(x)dx$$

Tracciare, sullo stesso grafico  $f(x)$ ,  $f(-x)$ ,  $f(70-x)$ ,  $f(90-x)$  e determinare per quali valori di  $y \in \mathbb{R}$  si ha  $g(y) \neq 0$ .

6. Sia

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & x \in D \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

ove  $D$  è il settore circolare rappresentato in figura e  $\theta = \frac{\pi}{3}$ .



Calcolare, facendo il minor numero possibile di passaggi,

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy$$

7. Siano  $X = [1 \ 2 \ 3]'$ ,  $Y = [4 \ 5]'$ . Calcolare la matrice  $A = XX'$ .

Dimostrare che  $A$  è simmetrica, qualunque sia il vettore  $X \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ . Dire quali tra le seguenti quantità hanno senso e calcolarle:  $XY'$ ,  $X'X$ ,  $YX'$ ,  $YX$ .

8. Sia data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Calcolare, il più rapidamente possibile,  $A^{-1}$ ,  $\det(A)$ ,  $\text{tr}(A)$  e gli autovalori di  $A$  ( $\det(\cdot)$  e  $\text{tr}(\cdot)$  indicano, rispettivamente, il determinante e la traccia).

9. Sia data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Calcolare, il più rapidamente possibile,  $\det(A)$  e  $\text{tr}(A)$ .

10. Sia data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Calcolare, il più rapidamente possibile,  $A^{-1}$ ,  $\det(A)$ ,  $\text{tr}(A)$  e gli autovalori di  $A$ .