IMAD – Laurea triennale

Soluzioni del test di autovalutzione

Prof. Giancarlo Ferrari Trecate

Funzioni

1. Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ -\frac{1}{2}x + 1 & x \in [0,2] \\ 0 & x > 1 \end{cases}.$$

Se ne disegni il grafico e da questo si deduca il grafico di $f(-x)$ e di $f(-2x+1)$.

Si determini l'insieme $D_y = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \leq y\}$ al variare del parametro y in $\mathbb{R}$.

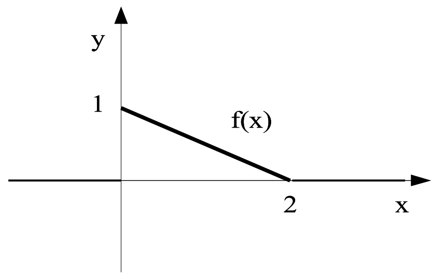


Grafico di $f(-x)$

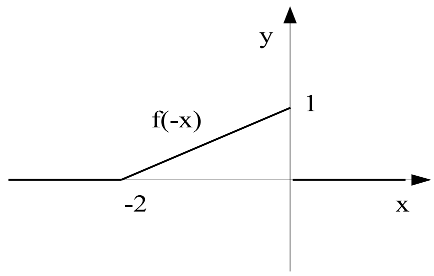
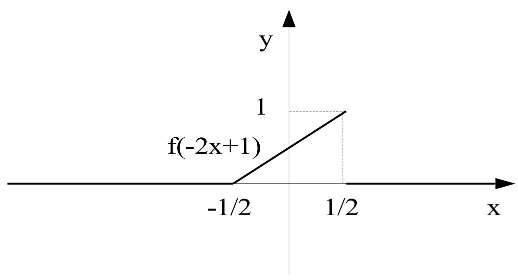


Grafico di $f(-2x+1)$



Calcolo di D_y:

- per $y < 0$ si ha $D_y = \emptyset$
- per $y = 0$ si ha $D_0 = (-\infty, 0) \cup [2, +\infty)$
- per $y \in (0,1)$ si ha $D_y = D_0 \cup [2-2y, 2)$
- per $y \geq 1$ si ha $D_y = \mathbb{R}$.

Integrali

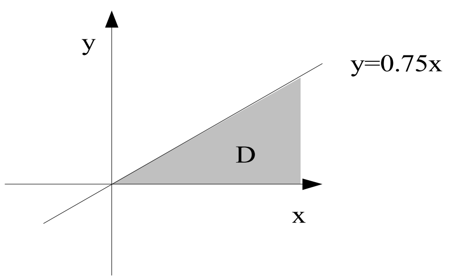
2. Sia $z \in \mathbb{R},\ z > 0$. Calcolare la funzione
   $g(z) = \int_0^{+\infty} \int_0^{zx} e^{-x-y} dy dx$

$$
\begin{aligned}
g(z) &= \int_0^{+\infty} e^{-x} \int_0^{zx} e^{-y} dy dz \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-x}(-e^{-zx} + 1) dx = \\
&= \int_0^{+\infty} -e^{-(z+1)x} + e^{-x} dx = \\
&= \left[\frac{e^{-(z+1)x}}{z+1}\right]_0^{+\infty} + \left[-e^{-x}\right]_0^{+\infty} = \\
&= \frac{z}{z+1}
\end{aligned}
$$

---

3. Calcolare $\int \int_D f(x) f(y) dx dy$ ove D è l'insieme in figura e

$$
f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}
$$



$$
\begin{aligned}
\int\int_D f(x)f(y)dxdy &= \int_0^{+\infty} f(x)\int_0^{0.75x} f(y)dydx \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-x}\left[-e^{-y}\right]_0^{0.75x} dx = \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-x}(-e^{-0.75x}+1)dx = \\
&= \int_0^{+\infty} -e^{-1.75x}+e^{-x}dx = \\
&= \left[\frac{e^{-1.75x}}{1.75}\right]_0^{+\infty} + \left[-e^{-x}\right]_0^{+\infty} = \\
&= -\frac{1}{1.75}+1
\end{aligned}
$$

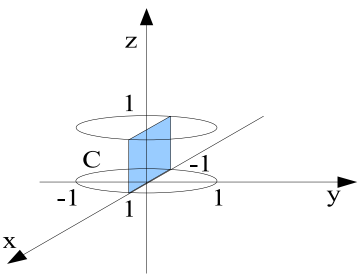
---

4. Sia $B((0,0),1) \subset \mathbb{R}^2$ la palla di centro $(0,0)$ e raggio unitario. Siano inoltre

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x,y) \in B((0,0),1) \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \quad \text{e} \quad g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy.$$

Dare un'interpretazione geometrica al valore $g(0)$ e calcolare $g(x)$.

$g(0)$ è l'area del rettangolo ombreggiato rappresentato in figura.



I punti (x,y) del cerchio C in figura verificano l'equazione $x^2+y^2=1$ da cui $y=\pm\sqrt{1-x^2}$.

Allora,

- per $x \in (-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$, si ha $g(x)=0$
- per $x \in [-1,1]$ si ha

$$g(x) = \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 1dy = 2\sqrt{1-x^2}$$

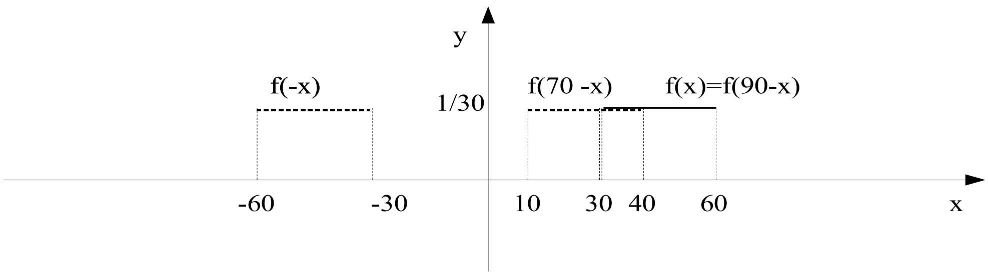
---

5. Siano

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{30} & x \in [30, 60] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \quad \text{e} \quad g(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y-x)f(x)dx$$

Tracciare, sullo stesso grafico $f(x)$, $f(-x)$, $f(70-x)$, $f(90-x)$ e determinare per quali valori di $y \in \mathbb{R}$ si ha $g(y) \neq 0$.

Si noti che il grafico della funzione $f(a-x)$ si "sposta" verso destra per valori di a crescenti. In particolare $f(x) = f(90-x)$. Il grafico richiesto è riportato nella figura seguente.



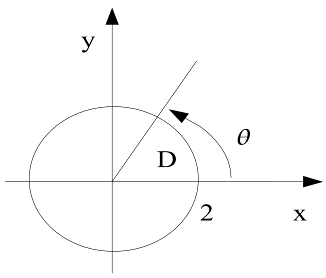
La funzione $g(y)$ è non nulla quando l'insieme $\{x : f(y-x)f(x)\}$ ha misura non nulla, il che accade quando i grafici di $f(y-x)$ e $f(x)$ hanno in comune più di un punto. Questa condizione è verificata per $y \in (60, 120)$.

---

6. Sia

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & x \in D \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

ove D è il settore circolare rappresentato in figura e $\theta = \frac{\pi}{3}$.



Calcolare, facendo il minor numero possibile di passaggi $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dxdy$

Ricordiamo che l'area di un settore circolare di raggio R è pari a $\frac{\theta}{2}R^2$, ove θ è espresso in radianti. Dalla figura si ricava $R = 2$ e quindi $I = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} 1 dxdy = \frac{2}{3}\pi$.

---

7. Siano $X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}'$, $Y = \begin{bmatrix} 4 & 5 \end{bmatrix}'$. Calcolare la matrice $A = XX'$. Dimostrare che A è simmetrica, qualunque sia il vettore $X \in \mathbb{R}^{n\times 1}$. Dire quali tra le seguenti quantità hanno senso e calcolarle: XY', $X'X$, YX', YX.

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

La simmetria della matrice è mostrata dalle relazioni $A' = (XX')' = XX' = A$.

Il prodotto YX coinvolge due vettori colonna e pertanto non ha senso. Gli altri prodotti valgono:

$$XY' = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 8 & 10 \\ 12 & 15 \end{bmatrix}$$

$$X'X \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 14$$

$$YX' = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 5 & 10 & 15 \end{bmatrix}$$

---

8. Sia data la matrice
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$
Calcolare, il più rapidamente possibile, A^{-1}, $\det(A)$, $\mathrm{tr}(A)$ e gli autovalori di A ($\det(\cdot)$ e $\mathrm{tr}(\cdot)$ indicano, rispettivamente, il determinante e la traccia).

La matrice A è diagonale ed i sui autovalori $\lambda_i,\ i = 1, \ldots, 4$ coincidono con gli elementi della diagonale. Pertanto, $\det(A) = \prod_{i=1}^{4} \lambda_i = 24$, $\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{4} \lambda_i = 10$, e

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 \end{bmatrix}$$

* * *

9. Sia data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Calcolare, il più rapidamente possibile, $\det(A)$ e $\mathrm{tr}(A)$.

* * *

La matrice A è triangolare ed i sui autovalori $\lambda_i,\ i = 1, \ldots, 4$ coincidono con gli elementi della diagonale. Pertanto, $\det(A) = \prod_{i=1}^{4} \lambda_i = 24$ e $\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{4} \lambda_i = 10$.

* * *

A 10. Sia data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Calcolare, il più rapidamente possibile, $A^{-1},\ \det(A),\ \mathrm{tr}(A)$ e gli autovalori di .

* * *

La matrice A è diagonale a blocchi. Sia

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}, A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

Si ottiene:

$\det(A) = \det(A_1)\det(A_2) = -2 \cdot 8 = -16$

$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{4} a_{ii} = 8.$

Si noti che

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ 0 & A_2^{-1} \end{bmatrix}$$

ove

$$A_1^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad A_2^{-1} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Infine, gli autovalori di A sono l'unione degli autovalori di A_1 e A_2:

- A_1 è diagonale, quindi $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 2$
- il polinomio caratteristico di A_2 è $p(\lambda) = \det(\lambda I - A_2) = \lambda^2 - 7\lambda + 8$ e l'equazione $p(\lambda) = 0$ ha soluzioni $\lambda_{3,4} = \frac{7\pm\sqrt{7}}{2}$.