Logistica (mn) – 6 CFU

Appello del 10 Febbraio 2010

NOME: ______________________ COGNOME: _________________ MATR: ________

Avvertenze ed istruzioni::

- ✔ Il compito dura 2 ore e trenta.
- ✔ Se dovessero mancare dati negli esercizi il candidato li derivi aggiungendo opportune ipotesi che debbono essere motivate ed indicate chiaramente nello svolgimento dell'esercizio.
- ✔ Laddove viene richiesta l'applicazione di uno o più aspetti teorici si richiede di indicare brevemente la teoria utilizzata.

Esercizio 1. Teoria.

Definire in cosa differiscono le decisioni Strategiche, Tattiche ed Operative in ambito logistico.

Esercizio 2. Ottimizzazione non lineare

Si risolva il seguente problema di ottimizzazione

$$\underset{x_1^2+x_2^2<1}{\arg\max} \quad 10\, x_1 x_2$$

Esercizio 3. Caso reale: La logistica delle Rondelle

3.1 Modellazione della produzione

Una un'azienda meccanica fabbrica rondelle di tre diversi tipologie: normali, zigrinate e temprate. Le rondelle vengono lavorate a blocchi da 50 unità; dove un singolo blocco prevede lavorazioni diverse con tempi diversi. Ogni lavorazione possiede un diverso costo orario. Come indicato dalla tabella sottostante.

		Tipologia di prodotto			**Costo orario di lavorazione**
		Normale	**Zigrinate**	**Temprate**	
Lavorazione (50 unità)	**Foratura**	10 minuti	10 minuti	10 minuti	6 eurocent
	Taglio	5 minuti	20 minuti	3 minuti	12 eurocent
	Tempratura	--	--	3 minuti	5 eurocent
	Lucidatura	5 minuti	--	15 minuti	3 eurocent
Prezzo di vendita (100 unità)		5,5 eurocent	12 eurocent	8,2 eurocent	

Sapendo che la linea di produzione lavora su 2 turni da 7 ore al giorno, impostare un problema di massimizzazione volto a determinare che tipo di produzione oraria l'azienda dovrebbe impostare per massimizzare gli utili.

Nota: In questo esercizio si considera il costo delle materie è costante ed indipendente da come si diversifica la produzione. Pertanto si ha che l'utile dovuto al singolo prodotto è espresso dalla seguente:

(prezzo di vendita – costo di lavorazione) * quantita' prodotta

3.2) Determinazione della produzione ottimale

Si risolva il problema di produzione impostato nell'Esercizio 3.1. Utilizzando la tecnica di ottimizzazione più appropriata.

Se e solo se non si fosse risolto l'esercizio precedente, risolvere il seguente problema di minimo:

$$\arg\max \quad 10x_1 + 20x_2 + 30x_3$$

$$\begin{gathered} 7x_1 + 7x_2 + 7x_3 \leqslant 42 \\ x_1 + x_3 \leqslant 12 \\ x_3 \leqslant 57 \\ 10x_1 + 40x_2 + 6x_3 \leqslant 120 \\ x_{1,}\, x_{2,}\, x_3 \geqslant 0 \end{gathered}$$

3.3) Gestione delle scorte

L'azienda descritta nell'Esercizio 3.1 si rifornisce di materia prima (dischi di ferro) da un unico fornitore al prezzo di 1 euro per 1000 unita più 10 euro di spese di spedizione. Inoltre possiede un magazzino avente capacità massima .praticamente illimitata ed un holding cost unitario.

Sapendo che il mercato delle rondelle nell'esercizio (anno) attuale viene descritto dalle seguenti due costanti

shortage penalty = 3 domanda *D(t)* = 100,

determinare, utilizzando la teoria del lotto economico, la politica di acquisti che minimizza i costi di gestione del magazzino.

Svolgimento

Esercizio 2. Ottimizzazione non lineare

Il problema di minimo assegnato ha come regione di ammissibilità un intervallo aperto. Pertanto la soluzione del problema è data dalle soluzioni del problema non vincolato interne alla regione di ammissibilità.

Soluzione del problema non vincolato.

Condizione necessaria (o del primo ordine): annullamento del gradiente

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial x_1 x_2}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial x_1 x_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Condizione sufficiente (o del secondo ordine) Hessiana *H* semidefinita negativa.

$$H(x_{1,} x_2) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 x_1 x_2}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 x_1 x_2}{\partial x_1 x_2} \\ \dfrac{\partial^2 x_1 x_2}{\partial x_2 x_1} & \dfrac{\partial^2 x_1 x_2}{\partial x_2^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

autovalori di H

$$det(\lambda I - H(x_{1,} x_2)) = 0 \Leftrightarrow det\begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \pm 1$$

essendo gli autovalori di segno discorde si desume che il problema non vincolato non ammette punti di minimo. Pertanto anche il problema vincolato sull'aperto non ha punti di minimo.

3.1 Modellazione della produzione

La modellazione avviene per passi, identificazione delle variabili, dei vincoli e del funzionale di costo

identificazione delle variabili.

Analizzando il testo si identificano chiaramente le seguenti variabili:

- x_1 : produzione oraria di blocchi di 50 rondelle normali
- x_2 : produzione oraria di blocchi di 50 rondelle zigrinate
- x_3 : produzione oraria di blocchi di 50 rondelle temprate

identificazione dei vincoli.

I vincoli, nei problemi di produzione sono dati dai tempi di lavorazione.

Innanzi tutto questi tempi di lavoro non possono essere negativi, pertanto si ha che $x_{1,} x_{2,} x_3 \geqslant 0$.
Poi si deve valutare il tempo in cui sono impiegate le macchine utilizzate nel processo produttivo. Avendo impostato come variabili la produzione oraria si valuterà l'uso orario delle macchine responsabili delle varie lavorazioni

- Vincolo 1: foratura: $10\mathrm{x}_1 + 10\mathrm{x}_2 + 10\mathrm{x}_3 \leqslant 60 \Leftrightarrow x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 6$
- Vincolo 2: taglio: $5\mathrm{x}_1 + 20\mathrm{x}_2 + 3\mathrm{x}_3 \leqslant 60$

- Vincolo 3: temprratura: $10x_3 \leqslant 60 \Leftrightarrow x_3 \leqslant 20$
- Vincolo 4: lucidatura: $5x_1 + 15x_3 \leqslant 60 \Leftrightarrow x_1 + 3x_3 \leqslant 12$

Si noti come il vincolo 3 sia meno stringente del vincolo 4 e pertanto puo' essere eliminato. Per rendersene conto si consideri come il vincolo 4 possa essere riscritto come $x_3 \leqslant 4 - x_1/3$. Da esso si ricava come il massimo valore di x_3 (ottenuto ponendo $x_1 = 0$) sia pari a 4, che soddisfa ampiamente il vincolo 3.

identificazione del funzionale di costo

Come primo passo si calcola il costo in eurocent di produzione delle varie tipologie di rondelle

- normali (50 unità) $6\frac{10}{60} + 12\frac{5}{60} + 3\frac{5}{60} = \frac{9}{4}$
- zigrinate (50 unità) $6\frac{10}{60} + 12\frac{20}{60} = 5$
- temprate (50 unità) $6\frac{10}{60} + 12\frac{3}{60} + 5\frac{3}{60} + 3\frac{15}{60} = \frac{13}{5}$

L'utilità (oraria) diviene la seguente.

$$\left(\frac{5.5}{2} - \frac{9}{4}\right)x_1 + \left(\frac{12}{2} - 5\right)x_2 + \left(\frac{8.2}{2} - \frac{13}{5}\right)x_3 = \frac{11-9}{4}x_1 + x_2 + \frac{41-26}{10}x_3$$

$$\frac{1}{2}x_1 + x_2 + \frac{15}{10}x_3 = \frac{x_1 + 2x_2 + 3x_3}{2}$$

Quindi si ottiene il seguente problema di minimo:

$$\arg\max \quad x_1 + 2x_2 + 3x_3$$

$$\begin{gathered} x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 6 \\ 5x_1 + 20x_2 + 3x_3 \leqslant 60 \\ x_1 + 3x_3 \leqslant 12 \\ x_{1,}\, x_{2,}\, x_3 \geqslant 0 \end{gathered}$$

3.2 risoluzione del problema di minimo

Aggiungendo le variabili ombra si ottiene la seguente tabella di simplesso

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
	1	1	1	1	0	0	6
	5	20	3	0	1	0	60
	1	0	1	0	0	1	12
	1	2	3	0	0	0	

Si inizializza il simplesso portando in base le variabili ombra (inizializzazione lecita poiché tutte le variabili sono non negative)

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6		
x_4	1	1	1	1	0	0	6	6/1 = 6
x_5	5	20	3	0	1	0	60	60 / 3 = 20
x_6	1	0	**3**	0	0	1	12	12/3 = 4
	1	2	3	0	0	0	0	
			↑					

la variabile 3 entra in base mentre ne esce la 6

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6		
x_4	2/3	**1**	0	1	0	-1/3	2	2/1 = 2
x_5	4	20	0	0	1	-1	48	48/20=2,4
x_3	1/3	0	1	0	0	1/3	4	INF
	0	2	0	0	0	-1	-12	
		↑						

la variabile 2 entra in base mentre ne esce la 4

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_2	2/3	1	0	1	0	-1/3	2
x_5	-28/3	0	0	-20	1	-17/3	8
x_3	1/3	0	1	0	0	1/3	4
	-4/3	0	0	-2	0	-1/3	-16

Tutti coefficienti di simplesso sono non positivi pertanto si trova il seguente minimo

$$(x_{1,}\ x_{2,}\ x_3)=(0,\ 2,\ 4)$$

che corrisponde a produrre 100 rondelle zigrinate e 200 rondelle temprate all'ora.

33 Gestione delle scorte

Nel testo si richiede di utilizzare la teoria del del lotto economico per determinare la miglior politica di acquisti. Dall'analisi del testo si ricavano le seguenti informazioni nella simbologia del lotto economico.

- a : domanda costante = 100
- K : setup-cost = 25
- c : production cost = 0,001
- h : holding cost = 1
- p : shortage penalty = 3

Introducendo le grandezze
- Q : quantità ordinata ogni ciclo
- S : massima giacenza nel magazzino

Si ricava il seguente funzionale di costo

$$J(Q,\ S)=\frac{Ka}{Q}+ca+\frac{hS^2}{2\mathrm{Q}}+p\frac{(Q-S)^2}{2\mathrm{Q}}$$

Il cui valore minimo si ha per

$$\bar{Q}=\sqrt{\frac{2\mathrm{aK}}{h}\frac{p+h}{p}}=\sqrt{\frac{2\cdot 25\cdot 100}{1}\frac{4}{3}}=100\sqrt{\frac{2}{3}}=81{,}65$$

$$\bar{S}=\sqrt{\frac{2\mathrm{aK}}{h}\frac{p}{p+h}}=\sqrt{\frac{2\cdot 25\cdot 100}{1}\frac{3}{4}}=25\sqrt{6}=61{,}23$$

Il ciclo economico ha durata

$$\bar{\Delta}=\frac{\bar{Q}}{a}=\sqrt{\frac{2}{3}}=0{,}8165(anno)\Rightarrow 0{,}8165\cdot 12\simeq 10\,mesi$$