Logistica (mn) – 6 CFU

Appello del 13 Settembre 2010

NOME: ______________________ COGNOME: _________________ MATR: ________

Avvertenze ed istruzioni::

- ✔ Il compito dura 2 ore e trenta.
- ✔ Se dovessero mancare dati negli esercizi il candidato li derivi aggiungendo opportune ipotesi che debbono essere motivate ed indicate chiaramente nello svolgimento dell'esercizio.
- ✔ Si utilizza la convenzione di anno economico:tutti i mesi hanno 30 giorni (l'anno si compone di 360 gg.)
- ✔ Laddove venga richiesta l'applicazione di uno o più aspetti teorici si richiede di indicare <u>brevemente</u> la teoria utilizzata.

Esercizio 1) Ottimizzazione non lineare

Dato il seguente problema di minimo vincolato

$$\text{arg max} \quad 10x_1^2+20\sin(x_2)-x_3x_2$$

$$x_1+0.5x_3^2=x_2$$

$$x_1x_2=x_3$$

impostare (senza risolverle) le condizioni di primo e di secondo ordine per l'esistenza di punti di ottimo utilizzando la tecnica dei coefficienti di Lagrange (funzione Lagrangiana).

Caso reale: la logistica dell'organizzazione eventi

Esercizio 2).

Una piccola azienda di organizzazione eventi con sede a Milano ha acquisito una commessa che comporta l'allestimento e l'organizzazione di tre giornate di presentazione da svolgersi in 2 diverse città: Roma e Milano.

2.1 modellazione delle assunzioni.

Per realizzare i suddetti eventi l'azienda può utilizzare i propri impiegati, distogliendoli dalle attività giornaliere dell'azienda, e/o assumere collaboratori con contratto a progetto per affiancare o sostituire i dipendenti.

L'azienda vuole determinare quale sia politica di assunzione (intesa come il numero di ore da destinare ai contratti a progetto nell'organizzazione dei due eventi) che minimizzi il costo del personale. Impostare il problema di ottimizzazione tenendo conto che:

a) **Ore di lavoro richieste**. Per svolgere ogni singola manifestazione da tre giorni sono necessarie complessivamente 200 ore uomo. Poiché i collaboratori a contratto sono tendenzialmente inesperti, la loro produttività è inferiore. Per tanto, ai fini del computo delle 200 ore di lavoro necessarie per il singolo evento, le ore svolte da lavoratori a contratto conteranno l'ottanta per cento rispetto a quelle dei lavoratori dipendenti.(Per esempio, le 200 ore di una manifestazione possono essere ottenute impiegando 100 ore di collaboratori e 120 ore di dipendenti. Infatti si ha che 80% * 100 + 120 = 200).

b) **Costo delle ore di lavoro.** Il costo di un ora di lavoro di un dipendente è di 15 euro per l'evento di Roma e di 10 euro per l'evento di Milano. (il costo include anche la spesa di trasferta). Il costo di un ora di lavoro di un collaboratore a progetto è di 9 euro all'ora per ognuno dei due eventi.

c) **Vincoli sulle ore di lavoro.** Per evitare rallentamenti nel lavoro di routine dell'azienda, non è possibile impegnare i dipendenti dell'impresa per un totale di non più di 140 ore uomo nel congresso di Milano e 100 per il congresso di Roma.

2.2 Determinazione della miglior politica di assunzione.

Risolvere il problema di ottimizzazione determinato al punto precedente.

Se e solo se non si fosse risolto l'esercizio precedente, risolvere il seguente problema di minimo:

$$\arg\min \quad 10x_1+20x_2+30x_3+40x_4$$

$$\begin{gathered} x_1+0.5x_3=200 \\ x_2+0.5x_4=250 \\ x_1\leqslant 100 \\ 2x_2\leqslant 120 \\ x_1, x_2, x_3, x_4\geqslant 0 \end{gathered}$$

Suggerimento: Si consiglia di rimuovere dal problema le incognite legate da vincoli di uguaglianza.

Esercizio 3) Gestione delle scorte di magazzino

L'azienda descritta nell'Esercizio 2 in ogni evento che organizza distribuisce del materiale informativo (una busta di carta con un blocco, una brochure ed un libretto) a scopi promozionali. Le confezioni di materiale informativo sono stipate in un magazzino di capacità virtualmente illimitata.

Essa si serve da una sola tipografia con cui stipula un contratto di fornitura annuale che può essere articolato su più ordini ognuno dei quali ha un costo fisso di 120 Euro. (Ad esempio, se l'azienda stipula un contratto che comporta la fornitura di centoventimila di copie al costo unitario di 10 Eurocent e sceglie una consegna bimensile, riceverà 6 ordini da 10 mila unità e spenderà un totale di 12720 Euro = 120.000*0,10 + 6*120).

Sapendo che

a) Nell'esercizio attuale (anno) si stima che la domanda sia di 2500 unità al mese (vedi Nota).
b) Il prezzo stipulato con la copisteria è di 10 Eurocent al pezzo.
c) Lo shortage penalty unitario per l'esercizio in corso è pari a 1 euro l'anno.
d) Il costo di mantenimento (holding cost) annuo è di 4 euro a copia.

Si vuole determinare, utilizzando la teoria del lotto economico, la politica di acquisti che minimizza i costi di gestione del magazzino.

Nota - Sebbene gli eventi organizzati siano discontinui sia nel numero che nella frequenza, l'azienda, per semplicità di modellazione, preferisce considerare la domanda di materiale informativo costante.

Esercizio 4) Stima della domanda

Noto che la domanda di materiale informativo negli ultimi anni ha avuto il seguente andamento.

Anno	**2007**	**2008**	**2009**	**2010**
Domanda mensile (centinaia)	21	22	23,5	25

Stimare mediante un modello AR del primo ordine la domanda relativa al prossimo Esercizio (anno 2011). Si indichino solo i conti senza eseguirli.

Esercizio 5) (facoltativo) Teoria

Come si valuta la bontà di un modello AR?

Svolgimento

Esercizio 1. Ottimizzazione non lineare

La regione di ammissibilità del problema di minimo assegnato è descritta da due vincoli di uguaglianza

$$h_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 + 0.5x_3^2 - x_2 = 0$$
$$h_2(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 - x_3 = 0$$

Pertanto la tecnica dei moltiplicatori di Lagrange è applicabile .Questa tecnica si basa sull'introduzione della funzione detta lagrangiana che risulta essere

$$L(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \lambda_2) = 10x_1^2 + 20\sin(x_2) - x_3 x_2 + \lambda_1(x_1 + 0.5x_3^2 - x_2) + \lambda_2(x_1 x_2 - x_3)$$

Condizione necessaria (o del primo ordine): annullamento del gradiente della Lagrangiana, per completezza si riporta il valore del gradiente.

$$\nabla L(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \lambda_2) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial L(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \lambda_2)}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial L(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \lambda_2)}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial L(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \lambda_2)}{\partial x_3} \\ \dfrac{L(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \lambda_2)}{\partial \lambda_1} \\ \dfrac{L(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \lambda_2)}{\partial \lambda_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20x_1 + \lambda_1 + \lambda_2 x_2 \\ 20\cos(x_2) - x_3 - \lambda_1 + \lambda_2 x_1 \\ -x_2 + \lambda_1 x_3 - \lambda_2 \\ x_1 + 0.5x_3^2 - x_2 \\ x_1 x_2 - x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Condizione sufficiente (o del secondo ordine) gli zeri del determinante della matrice di Hankock *W* calcolata nel punto di equilibrio debbono essere minori di zero (problema di massimo).

$$W(z, x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \lambda_2) = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_1 x_2} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_1 x_3} \\ \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_2 x_3} \\ \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_3 x_1} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_3 x_2} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x_3^2} \end{bmatrix} - zI & \begin{bmatrix} \dfrac{\partial h_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial h_2}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial h_1}{\partial x_2} & \dfrac{\partial h_2}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial h_1}{\partial x_3} & \dfrac{\partial h_2}{\partial x_3} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \dfrac{\partial h_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial h_1}{\partial x_2} & \dfrac{\partial h_1}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial h_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial h_2}{\partial x_2} & \dfrac{\partial h_2}{\partial x_3} \end{bmatrix} & 0 \end{bmatrix}$$

Per completezza si riporta la matrice dopo aver calcolato le derivate

$$W(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \lambda_2) = \begin{bmatrix} 20 - z & \lambda_2 & 0 & 1 & x_2 \\ \lambda_2 & -20\sin(x_2) - z & -1 & -1 & x_1 \\ 0 & 1 & -\lambda_1 - z & -x_3 & -1 \\ 1 & -1 & x_3 & 0 & 0 \\ x_2 & x_1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2.1 Modellazione delle assunzioni

La modellazione avviene per passi, identificazione delle variabili, del funzionale di costo e dei vincoli

identificazione delle variabili.

Analizzando il testo si identificano chiaramente le seguenti variabili:

- x_1 : ore uomo di dipendenti impiegati per l'evento di Roma
- x_2 : ore uomo di collaboratori impiegati per l'evento di Roma
- x_3 : ore uomo di dipendenti impiegati per l'evento di Milano
- x_4 : ore uomo di collaboratori impiegati per l'evento di Milano

identificazione del funzionale di costo

poiché il problema richiede di determinare la politica che riduce al minimo le spese del personale il funzionale di costo $J(x_{1,} x_{2,} x_{3,} x_4)$ sarà dato dalla spesa per il personale, che dovrà essere minimizzata. Analizzando il punto b) si ottiene chiaramente

$$J(x_{1,} x_{2,} x_{3,} x_4) = 15\mathrm{x}_1 + 9\mathrm{x}_2 + 10\mathrm{x}_3 + 9\mathrm{x}_4$$

identificazione dei vincoli.

I vincoli sono dati dalle informazioni contenute ai punti a e c.
Ore di lavoro richieste. Dall'analisi del testo si ricava che le ore totali efficacemente nell'organizzazione di un evento sono date dalla somma delle ore spese dai dipendenti e dell'ottanta per cento delle ore spese dai collaboratori. Si ottengono quindi i due vincoli

- Congresso Milano: $x_1 + 0.8\,x_2 = 200$
- Congresso Roma: $x_3 + 0.8\,x_4 = 200$

Si noti come entrambi i vincoli siano di uguaglianza.

Limiti di utilizzo dei dipendenti. Il testo semplicemente limita le ore in cui si possono utilizzare i dipendenti quindi due delle incognite.

- Congresso Roma: $x_1 \leqslant 100$
- Congresso Milano: $x_3 \leqslant 140$

Quindi si ottiene il seguente problema di minimo:

$$\arg\min \quad 15\mathrm{x}_1 + 9\mathrm{x}_2 + 10\mathrm{x}_3 + 9\mathrm{x}_4$$

$$\begin{gathered} x_1 + 0.8\,x_2 = 200 \\ x_3 + 0.8\,x_4 = 200 \\ x_1 \leqslant 100 \\ x_3 \leqslant 140 \\ x_{1,} x_{2,} x_{3,} x_4 \geqslant 0 \end{gathered}$$

2.2 risoluzione del problema di minimo

Seguendo il suggerimento presente nel testo si utilizzano i due vincoli di uguaglianza per eliminare due incognite del problema.

Primo vincolo. $x_1 + 0.8\,x_2 = 200$
Il vincolo lega le ore svolte dai collaboratori e dai dipendenti nell'evento di Roma. Essendo noi interessati a determinare le ore da bandire a contratto x_2, converrà eliminare dal problema x_1. Pertanto, ricavando dal vincolo che $x_1 = 200 - 0.8\,x_2$ e sostituito nel problema precedente (vincoli di positività compresi) si ottiene

$$\arg\min \quad 15(200-0.8x_2)+9x_2+10x_3+$$

$$\begin{gathered} x_3+0.8x_4=200 \\ 200-0.8x_2\leqslant 100 \\ x_3\leqslant 140 \\ 200-0.8x_2\geqslant 0 \\ x_{2,}x_{3,}x_4\geqslant 0 \end{gathered}$$

Fatti i conti si ottiene (sin noti come il vincolo di positività su x2 sia meno stringente del secondo vincolo e per tanto sia stato eliminato)

$$\arg\min \quad 3000-3x_2+10x_3+9x_4$$

$$\begin{gathered} x_3+0.8x_4=200 \\ x_2\geqslant 125 \\ x_3\leqslant 140 \\ x_2\leqslant 250 \\ x_{3,}x_4\geqslant 0 \end{gathered}$$

Secondo vincolo. $x_3+0.8x_4=200$

Ripetendo l'analogo ragionamento, si procede applicando al problema precedente la sostituzione $x_3=200-0.8x_4$ ottenendo:

$$\arg\min \quad 3000-3x_2+10(200-0.8x_4)+9x_4$$

$$\begin{gathered} x_2\geqslant 125 \\ 200-0.8x_4\leqslant 140 \\ x_2\leqslant 250 \\ 200-0.8x_4\geqslant 0 \\ x_4\geqslant 0 \end{gathered}$$

Da cui si perviene alla seguente formulazione

$$\arg\min \quad 5000-3x_2+x_4$$

$$\begin{gathered} x_2\geqslant 125 \\ x_4\geqslant 75 \\ x_2\leqslant 250 \\ x_4\leqslant 250 \end{gathered}$$

Il problema essendo lineare e presentando solo due incognite può essere agevolmente risolto in via grafica. Una via più veloce tuttavia può essere ottenuta osservando che la regione di ammissibilità è un rettangolo e ricordando che in un problema di programmazione lineare la soluzione è posta sempre in un vertice della regione di ammissibilità. Pertanto il funzionale di costo valutato nei vertici produce i seguenti valori

	Vertice 1	***Vertice 2***	*Vertice 3*	*Vertice 4*
x_2	125	**250**	125	250
x_4	75	**75**	250	250
Costo J	4700	**4325**	4875	4500

applicando il criterio del confronto si ha che si dovrebbero bandire 75 ore per l'evento milanese e la totalità delle ore 250 per l'evento romano.

Esercizio 3 Gestione delle scorte

Nel testo si richiede di utilizzare la teoria del del lotto economico per determinare la miglior politica di acquisti. Dall'analisi del testo, utilizzando come unità di merce la brochure, economica l'euro e temprorale l'anno, si ricavano le seguenti informazioni nella simbologia del lotto economico.

- a : domanda costante = 30000 = 12 * 2500 = 3 * 10 ^{4}
- K : setup-cost = 120
- c : production cost = 0,02
- h : holding cost = 4
- p : shortage penalty = 1

Introducendo le grandezze
- Q : quantità ordinata ogni ciclo
- S : massima giacenza nel magazzino

Si ricava il seguente funzionale di costo

$$J(Q,S)=\frac{Ka}{Q}+ca+\frac{hS^2}{2Q}+p\frac{(Q-S)^2}{2Q}$$

Il cui valore minimo si ha per

$$\bar{Q}=\sqrt{\frac{2aK}{h}\frac{p+h}{p}}=\sqrt{\frac{2\cdot3\cdot10^4\cdot120}{4}\frac{4+1}{1}}=3000$$

$$\bar{S}=\sqrt{\frac{2aK}{h}\frac{p}{p+h}}=\sqrt{\frac{2\cdot3\cdot10^4\cdot120}{4}\frac{1}{4+1}}=600$$

Il ciclo economico ha durata

$$\bar{\Delta}=\frac{\bar{Q}}{a}=\frac{3000}{3\cdot10^4}=\frac{1}{10}=0{,}1\,(anno)\Rightarrow 0{,}1\cdot360=36\,giorni$$

La politica di acquisto ottimale prevede quindi 10 ordini l'anno di 3000 unità l'uno.

Esercizio 4)

Il modello autoregressivo (AR) del primo ordine di una serie storica y viene descritto dalla seguente formula

$$y(t+1)=a\cdot y(t)+e(t)$$

Per stimare il parametro incognito a si applica il modello ai dati presenti supponendo l'errore nullo, ottenendo le seguenti equazioni

$$y(2008)=a\cdot y(2007)$$
$$y(2009)=a\cdot y(2008)$$
$$y(2010)=a\cdot y(2009)$$

se si introducono il vettore dei termini noti $Y=[y(2008)\ y(2009)\ y(2010)]'$ ed il vettore dei regressori $\Phi=[y(2007)\ y(2008)\ y(2009)]'$, il sistema precedente si esprimibile nella forma compatta $Y=\Phi a$.

La stima di a si ottiene con semplici manipolazioni. $Y=\Phi a\rightarrow\Phi' Y=\Phi'\Phi a\rightarrow(\Phi'\Phi)^{-1}\Phi' Y=a$

Applicando la formula ottenuta al caso in esame si ha che

$$\Phi'\Phi=[y(2007)\ y(2008)\ y(2009)]\begin{bmatrix}y(2007)\\y(2008)\\y(2009)\end{bmatrix}=y(2007)^2+y(2008)^2+y(2009)^2$$

$$\Phi' Y=[y(2007)\ y(2008)\ y(2009)]\begin{bmatrix}y(2008)\\y(2009)\\y(2010)\end{bmatrix}$$

$$\Phi' Y=y(2007)y(2008)+y(2008)y(2009)+y(2009)y(2010)$$

da cui si ha:

$$a=(\Phi'\Phi)^{-1}\Phi' Y=\frac{y(2007)y(2008)+y(2008)y(2009)+y(2009)y(2010)}{y(2007)^2+y(2008)^2+y(2009)^2}$$