Logistica (mn) – 6 CFU

Appello del 22 Luglio 2010

NOME: ________________________ COGNOME: ___________________ MATR: ________

Avvertenze ed istruzioni:

- ✔ Il compito dura 2 ore e quindici.
- ✔ Non è permesso lasciare l'aula senza consegnare il compito o ritirarsi.
- ✔ Se dovessero mancare dati negli esercizi il candidato li derivi aggiungendo opportune ipotesi che debbono essere motivate ed indicate chiaramente nello svolgimento dell'esercizio.
- ✔ Laddove venga richiesta l'applicazione di uno o più aspetti teorici si richiede di indicare brevemente la teoria utilizzata.
- ✔ Si utilizza la convenzione di anno economico:tutti i mesi hanno 30 giorni (l'anno si compone di 360 gg.)

Esercizio 1. Ottimizzazione non lineare

Si risolva il seguente problema di ottimizzazione

$$\arg\min \quad x_1^2+\left(x_2-\frac{3}{2}\right)^2+x_1 x_2$$

Esercizio 2. Ottimizzazione lineare

Risolvere il seguente problema di massimo:

$$\arg\max \qquad x_1+2x_2+4x_3$$

$$\begin{gathered} x_3\leqslant 10 \\ x_1+x_2\leqslant 3 \\ 3x_1+8x_2\leqslant 12 \\ x_{1,}x_{2,}x_3\geqslant 0 \end{gathered}$$

Esercizio 3. Caso reale: La logistica delle motociclette.

3.1 Modellazione del trasporto

Un'azienda importa motociclette di lusso dall'America e le rivende in tutta Italia. Essa possiede tre punti di raccolta e stoccaggio presso tre grandi città italiane: Milano, Venezia e Roma. Le motociclette raggiungono l'Italia via nave dove poi vengono trasportate via gomma nei vari magazzini. Inoltre, per motivi fideistici, l'azienda utilizza solamente i porti di Venezia, Roma e Genova

Nell'esercizio attuale l'azienda ha acquistato 12000 motociclette presso due grandi stabilimenti americani: New York (acquistate 5000 unità) e Miami (7000 unità). Le previsioni di vendita sono di 2500 unità per l'area coperta dal magazzino di Roma, 3500 per l'area di Venezia e 4900 per l'area milanese.

Sapendo che le distanze fra le città coinvolte sono date dalla seguente tabella, impostare il problema di trasporto ipotizzando che il costo del trasporto via nave di 1 motocicletta sia di 10 euro al miglio marino (mil.) mentre quello via gomma sia di 5 euro al kilometro (km).

	New York	Miami	Genova	Venezia	Roma	Milano
New York	0	--	3505 mil	3821 mil	3695 mil	---
Miami	--	0	4309 mil	4625 mil	4499 mil	--
Genova	3505 mil	4309 mil	0	412 km	451 km	121 km
Venezia	3821 mil	4525 mil	412 km	0	430 km	297 km
Roma	3695 mil	4499.mil	451 km	430 km	0	604 km
Milano	--	--	121 km	297 km	604 km	0

(N.B. si considerano trascurabili gli spostamenti all'interno della stessa città)

3.2) Gestione delle scorte

L'azienda descritta nell'Esercizio 3.1 possiede diverse rivendite finali ognuna delle quali consta di un magazzino e di un punto vendita.

La rivendita Padovana si rifornisce dall'unità di stoccaggio di Venezia con un costo fisso di 100 euro a viaggio. Essa possiede un salone avente capacità massima di 30 unità che può essere aumentata per brevi o brevissimi periodi fino a 50 unità. Inoltre, il magazzino riesce a mantenere una motocicletta in condizioni ideali al costo medio di 20 cent al giorno.

Sapendo che il mercato nell'esercizio attuale viene descritto dalle seguenti costanti:

shortage penalty = 10 euro/mese domanda *D(t= mese)* = 30 motociclette

determinare, utilizzando la teoria del lotto economico, la politica di acquisti che minimizza i costi di gestione del magazzino contemplando la possibile rottura dello stock.

3.3). Teoria.
Si supponga che la strategia decisa ai punti 3.1 e 3.2 venga applicata ad inizio anno e che al mese di giugno (metà anno) ci si rendesse conto che nei restanti sei mesi si assisterebbe ad un incremento della domanda del 10%. Il candidato indichi, motivando la risposta, quali modifiche si dovrebbero apportare alla strategia descritta negli esercizi 3.1 e 3.2.
(facoltativo) Nel caso si ritengano necessarie delle modifiche, indicare i possibili effetti di queste modifiche nelle quantità calcolate.

Svolgimento

Esercizio 1. Ottimizzazione non lineare

Il problema di minimo assegnato è di tipo non vincolato, pertanto le soluzioni si trovano sfruttando le condizioni di primo e secondo ordine.

Condizione necessaria (o del primo ordine): annullamento del gradiente del funzionale di costo (*f*)

$$\nabla f(x_{1,}x_2)=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial f(x_{1,}x_2)}{\partial x_1}\\ \dfrac{\partial f(x_{1,}x_2)}{\partial x_2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\mathrm{x}_1+x_2\\ 2(x_2-\dfrac{3}{2})\cdot 1+x_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x_2=-2\mathrm{x}_1\\ 2\mathrm{x}_2+x_1=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_2=2\\ x_1=-1\end{cases}$$

Condizione sufficiente (o del secondo ordine) gli zeri del determinante della matrice Hessiana *H* debbano avere parte reale maggiore di zero (problema di minimo).

La matrice risulta essere

$$H(x_{1,}x_2)=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_2}\\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$$

Il cui autovalori sono

$$det(zI-H)=(z-2)\cdot(z-2)-(-1)\cdot(-1)=z^2-4\mathrm{z}+3=0\Rightarrow z_{1,2}=\frac{4\mp\sqrt{16-12}}{2}\Rightarrow \begin{matrix}z_1=3\\ z_2=1\end{matrix}$$

essendo entrambi gli autovalori a parte reale positiva, il punto

$$x_1=-1,\quad x_2=2$$

è un punto di minimo.

Esercizio 2 Ottimizzazione lineare

Analizzando il problema si nota come la variabile x_3 sia di fatto coinvolta in soli due vincoli: quello di positività ed un limite superiore. Essa risulta quindi slegata dalle altre, pertanto possiamo assegnarle il valore che meglio si adatta ai nostri scopi fra quelli leciti ($0\leqslant x_3\leqslant 10$). La variabile influisce in maniera diretta sul valore del funzionale che si deve massimizzare, pertanto la si porrà al proprio valore massimo ovvero

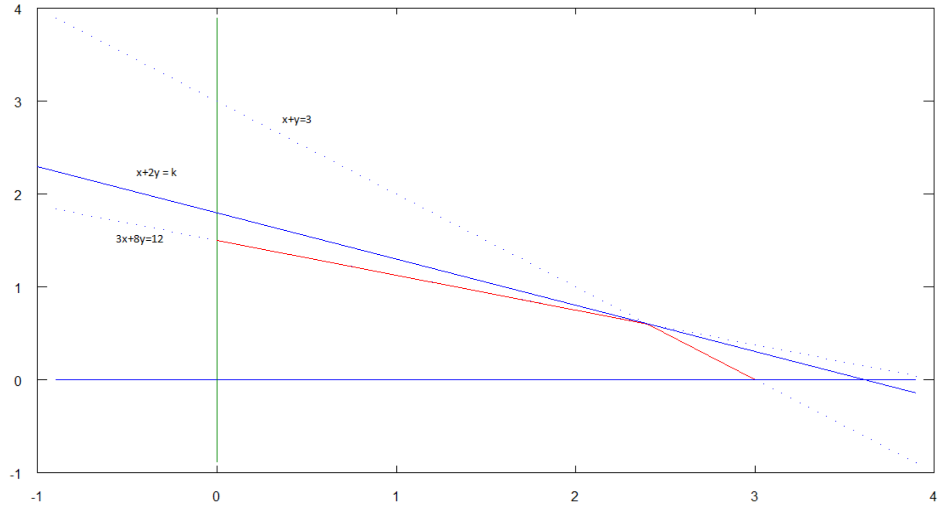
$$x_3=10$$

I valori delle altre incognite sono ottenibili risolvendo il problema ottenuto rimuovendo x_3 dal problema originale:

$$\begin{matrix}\arg\max & \qquad x_1+2x_2\\ x_1+x_2\leqslant 3 & \\ 3x_1+8x_2\leqslant 12 & \\ x_{1,}x_2\geqslant 0 & \end{matrix}$$

Il problema risulta lineare in due incognite e può venire facilmente risolto utilizzando il metodo grafico.

Riportando il funzionale e zona di ammissibilità si ottiene il seguente grafico in cui in blu viene segnata la curva di livello tangente alla zona di ammissibilità delineata dai vincoli di positività (gli assi) e non (le linee tratteggiate).



da cui si evince come il punto (2.4 ; 0.6) sia soluzione del simplesso. Per cui la soluzione del problema originario risulta essere

$$x_1 = 2.4 \qquad x_2 = 0.6 \qquad x_3 = 10$$

La logistica delle motociclette.
3.1 la modellazione del trasporto.

La modellazione avviene per passi, identificazione delle variabili, dei vincoli e del funzionale di costo

identificazione delle variabili.

Analizzando il testo si vede chiaramente come il problema proposto sia un problema di trasporto a due stadi, avente la seguente dimensionalità:

- Sorgenti $M = 2$ (nell'ordine: New York e Miami)
- Depositi intermedi $P = 3$ (nell'ordine: Genova, Venezia, Roma)
- Destinazioni finali $N = 3$ (nell'ordine: Venezia, Roma, Milano)

Questo problema è caratterizzato dalle seguenti $P(N+M) = 15$ variabili

- 6 variabili $x_{i,p}$: centinaia di motociclette trasportate dalla sorgente *i* al deposito intermedio *p*.
- 9 variabili $y_{p,j}$: centinaia di motociclette trasportate dal deposito intermedio *p* alla destinazione *j*

identificazione dei vincoli.

I vincoli, nei problemi di trasporto a due fasi sono di quattro tipi:.

- 12 **Vincoli di positività**: non si possono muovere quantità negative
$$x_{i,p}, y_{p,j} \geqslant 0$$
- 2 **Vincoli di sorgente**: tutte le moto debbono lasciare il porto. Pertanto la somma delle merci che lasciano il porto deve essere uguale alla quantità di beni presenti nel porto stesso:
$$\sum_{p=1}^{P} x_{1,p} = \frac{5000}{100} \quad \text{e} \quad \sum_{p=1}^{P} x_{2,p} = \frac{7000}{100}$$
- 3 **Vincoli di domanda**: ad ogni destinazione finale deve giungere il corretto quantitativo di merce.
Come si nota dalle specifiche la quantità procacciata (12000) è superiore a quella in previsione di vendita (10900 = 2500 + 3500 + 4900). Poiché l'azienda in questione ha come mercato di vendita quello italiano, pare saggio spostare le 1100 unità eccedenti nel vecchio continente onde supplire eventuali variazioni della

domanda a costi ridotti in termini di reazione.
Rimane il problema di come suddividere le eccedenze fra i tre magazzini. Indicati con e_1 , e_2 ed e_3 le eccedenze assegnate rispettivamente ai magazzini di Venezia, Roma, Milano; una possibile approccio è quello di dividerle in maniera proporzionale alla domanda attesa. Si ottengono quindi i seguenti valori:

$$e_1=\frac{2500}{10900}1100=252 \quad e_2=\frac{3500}{10900}1100=353 \quad e_2=1100-(252+353)=495$$

I vincoli di domanda risultano quindi essere:

$$\sum_{p=1}^{P} y_{p,1}=\frac{2500+252}{100} \quad \sum_{p=1}^{P} y_{p,2}=\frac{3500+353}{100} \quad \sum_{p=1}^{P} y_{p,3}=\frac{4900+495}{100}$$

- 3 **Vincoli di conservazione del flusso**: in ogni deposito il quantitativo della merce entrante deve essere uguale a quello della merce uscente

$$\sum_{i=1}^{2} x_{i,p}=\sum_{i=1}^{3} y_{p,j} \quad p=1,2,3$$

identificazione del funzionale di costo

Il funzionale di costo nient'altro è che il costo per unita di merce (100 motociclette) del trasporto, pertanto introdotte le seguenti matrici:

$$C=10\cdot 100\cdot\begin{bmatrix} 3505 & 3821 & 3695 \\ 4309 & 4625 & 4499 \end{bmatrix} \qquad D=5\cdot 100\cdot\begin{bmatrix} 412 & 451 & 121 \\ 0 & 430 & 297 \\ 430 & 0 & 604 \end{bmatrix}$$

si ha che il funzionale di costo risulta essere

$$\left(\sum_{i=1}^{2}\sum_{p=1}^{3} C_{i,p}x_{i,p}\right)+\left(\sum_{p=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} D_{p,i}y_{p,j}\right)$$

Quindi si ottiene il seguente problema di minimo:

$$\arg\min \quad \left(\sum_{i=1}^{2}\sum_{p=1}^{3} C_{i,p}x_{i,p}\right)+\left(\sum_{p=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} D_{p,i}y_{p,j}\right)$$

$$\sum_{p=1}^{3} x_{1,p}=50$$

$$\sum_{p=1}^{3} x_{2,p}=70$$

$$\sum_{p=1}^{P} y_{p,1}=27,52$$

$$\sum_{p=1}^{P} y_{p,2}=38,53$$

$$\sum_{p=1}^{P} y_{p,3}=53,95$$

$$\sum_{i=1}^{2} x_{i,p}=\sum_{i=1}^{3} y_{p,j} \quad p=1,2,3$$

$$x_{i,p}, y_{p,j}\geqslant 0$$

3.2 Gestione delle scorte

Nel testo si richiede di utilizzare la teoria del del lotto economico per determinare la miglior politica di movimentazione merci. Dall'analisi del testo si ricavano le seguenti informazioni nella simbologia del lotto economico dove utilizzeremo come unità di tempo il mese, come unità di peso la motocicletta e come unità di costo l'euro.

- a : domanda costante = 30
- K : setup-cost = 100
- c : production cost irrilevante ai fini della richiesta.
- h : holding cost = 0,20 * 30 = 6
- p : shortage penalty = 10

Introducendo le grandezze
- Q : quantità ordinata ogni ciclo
- S : massima giacenza nel magazzino

Si ricava il seguente funzionale di costo

$$J(Q,\, S)=\frac{Ka}{Q}+ca+\frac{hS^2}{2\text{Q}}+p\frac{(Q-S)^2}{2\text{Q}}$$

Il cui valore minimo si ha per

$$\bar{Q}=\sqrt{\frac{2\text{aK}}{h}\,\frac{p+h}{p}}=\sqrt{\frac{2\cdot30\cdot100}{6}\,\frac{10+6}{10}}=\sqrt{10\cdot100\,\frac{16}{10}}=40$$
$$\bar{S}=\sqrt{\frac{2\text{aK}}{h}\,\frac{p}{p+h}}=\sqrt{\frac{2\cdot30\cdot100}{6}\,\frac{10}{10+6}}=\sqrt{10\cdot100\,\frac{10}{16}}=25$$

Si noti come la giacenza massima di lungo periodo imposta sia pari a 25 motociclette quindi compatibile con i vincoli imposti dal problema.

Il ciclo ha durata pari a

$$\bar{\Delta}=\frac{\bar{Q}}{a}=\frac{40}{30}\quad \text{mesi} = 40 \text{ giorni}$$

3.3 Variazione della domanda.
Se la domanda incrementa del 10% negli ultimi sei mesi (mezzo anno), nell'ipotesi di domanda costante ci si può aspettare un aumento complessivo pari a

previsione di vendita mensile * 6 * 10% $\frac{10900}{12}*6*0.1=545$

Avendo scelto di importare le motociclette eccedenti (1100 unità) in Italia ed essendo queste superiori alla quantità richiesta, nessun ulteriore trasporto si rende necessario. Pertanto, il problema di trasposto non subisce alcuna variazione.

La gestione di magazzino deve essere ricalcolata ripetendo i precedente secondo i precedenti utilizzando come nuova domanda mensile

$$a_{new}=a*1.1=33$$

(facoltativo)
In particolare, si dovrebbe assistere ad un incremento della quantità ordinata che viene influenzata in maniera diretta dalla domanda; si ha infatti che

$$\bar{Q}_{new}=\sqrt{\frac{2\text{a}_{new}K}{h}\,\frac{p+h}{p}}=\sqrt{1.1\,\frac{2\text{aK}}{h}=\frac{p+h}{p}}=\sqrt{1.1}\,\bar{Q}=42$$

contrariamente il periodo che intercorre fra un ordine ed il successivo viene a diminuire, infatti si ha che:

$$\bar{\Delta}_{new}=\frac{\bar{Q}_{new}}{a_{new}}=\frac{\sqrt{1.1}\,\bar{Q}}{1.1\text{a}}=\frac{\sqrt{1.1}}{1.1}\,\Delta=\frac{\Delta}{\sqrt{1.1}}=\frac{40}{30*\sqrt{1.1}}=1{,}271\quad \text{mesi} = 38 \text{ giorni}$$