

# Logistica (mn) – 6 CFU

Appello del 25 Febbraio 2010

NOME: \_\_\_\_\_ COGNOME: \_\_\_\_\_ MATR: \_\_\_\_\_

## Avvertenze ed istruzioni::

- ✓ Il compito dura 2 ore e trenta.
- ✓ Non è permesso lasciare l'aula senza consegnare il compito o ritirarsi.
- ✓ Se dovessero mancare dati negli esercizi il candidato li derivi aggiungendo opportune ipotesi che debbono essere motivate ed indicate chiaramente nello svolgimento dell'esercizio.
- ✓ Laddove viene richiesta l'applicazione di uno o più aspetti teorici si richiede di indicare brevemente la teoria utilizzata.
- ✓ Si utilizza la convenzione di anno economico: tutti i mesi hanno 30 giorni (l'anno si compone di 360 gg.)

## Esercizio 1. Teoria.

Descrivere in cosa differisce la gestione della filiera produttiva (supply chain management) rispetto alla logistica tradizionale.

## Esercizio 2. Ottimizzazione non lineare

Si risolva il seguente problema di ottimizzazione

$$\begin{aligned} \arg \min & & 2x_1^2 + x_2 \\ x_1 + x_2^2 & = & 0 \end{aligned}$$

## Esercizio 3. Ottimizzazione lineare

Risolvere il seguente problema di massimo:

$$\begin{aligned} \arg \max & & x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\ x_3 & \leq & 10 \\ x_1 + x_2 & \leq & 3 \\ 3x_1 + 8x_2 & \leq & 12 \\ x_1, x_2, x_3 & \geq & 0 \end{aligned}$$

## Esercizio 4. Caso reale: La logistica del tè.

### 4.1 Modellazione del trasporto

Un'azienda importa tè dall'India e lo rivende in tutta Italia. Essa possiede tre grandi magazzini di raccolta e stoccaggio presso tre grandi città italiane: Milano, Venezia e Roma. Il tè raggiunge l'Italia via nave dall'India dove poi viene trasportato via gomma nei vari magazzini. Inoltre, per motivi fidelistici, l'azienda utilizza solamente i porti di Venezia, Roma e Genova

Nell'esercizio attuale l'azienda ha acquistato 12 tonnellate di tè presso due grandi giardini indiani: Darjeeling (acquistate 8 ton.) e Terai (4 ton.). Tutto il prodotto si dovrà dividere equamente fra i tre centri di raccolta italiani.

Sapendo che le distanze fra le città coinvolte sono date dalla seguente tabella, impostare il problema di trasporto ipotizzando che il costo del trasporto via nave di 1 quintale di tè sia di 10 euro al miglio marino (mil.) mentre quello via gomma sia di 4 euro al chilometro.

|            | Darjeeling | Terai    | Genova   | Venezia  | Roma     | Milano |
|------------|------------|----------|----------|----------|----------|--------|
| Darjeeling | 0          | 2127 mil | 7441 mil | 6855 mil | 6978 mil | ---    |
| Terai      | 2127 mil   | 0        | 9568 mil | 8982 mil | 9105 mil | --     |
| Genova     | 7441 mil   | 6855 mil | 0        | 412 km   | 451 km   | 121 km |
| Venezia    | 6855 mil   | 8982 mil | 412 km   | 0        | 430 km   | 297 km |
| Roma       | 6978       | 9105 mil | 451 km   | 430 km   | 0        | 604 km |
| Milano     | --         | --       | 121 km   | 297 km   | 604 km   | 0      |

(N.B. si considerano trascurabili gli spostamenti all'interno della stessa città)

#### 4.2) Gestione delle scorte

L'azienda descritta nell'Esercizio 4.1 possiede diverse rivendite finali ognuna delle quali consta di un magazzino e di un punto vendita.

La rivendita Padovana si rifornisce dall'unità di stoccaggio di Venezia con un costo fisso di 100 euro a viaggio. Inoltre essa possiede un magazzino avente capacità massima di 1 tonnellata ma in grado di conservare per lungo periodo solo 70 Kg di tè. Inoltre, il magazzino riesce a mantenere un chilogrammo di tè in condizioni ideali di temperatura ed umidità al costo di 20 eurocent al giorno.

Sapendo che il mercato del tè nell'esercizio (anno) attuale viene descritto dalle seguenti due costanti:

shortage penalty = 2 euro/mese

domanda  $D(t= \text{giorno}) = 10 \text{ kg}$

determinare, utilizzando la teoria del lotto economico, la politica di acquisti che minimizza i costi di gestione del magazzino contemplando la possibile rottura dello stock.

## Svolgimento

### Esercizio 2. Ottimizzazione non lineare

Il problema di minimo assegnato ha una regione di ammissibilità descritta mediante un vincolo di uguaglianza. L'approccio classico utilizza la lagrangiana, e ne verificarne le condizioni di primo e secondo ordine.

Si ricorda che dato un generico problema di ottimizzazione sottoposto a soli vincoli di uguaglianza

$$\begin{aligned} \arg \max/\min \quad & f(X) \\ & g_1(X)=0 \\ & g_2(X)=0 \\ & \dots \\ & g_m(X)=0 \end{aligned}$$

La lagrangiana risulta essere

$$L(X, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = f(X) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(X)$$

Applicando al problema in esame, si ottiene la seguente

$$L(x_1, x_2, \lambda) = 2x_1^2 + x_2 + \lambda(x_1 + x_2^2)$$

dove il pedice del moltiplicatore di Lagrange è stato rimosso poiché essendo  $m = 1$  non si presentano ambiguità.

Condizione necessaria (o del primo ordine): annullamento del gradiente della lagrangiana

$$\nabla L(x_1, x_2, \lambda) = \begin{bmatrix} \frac{\partial L(x_1, x_2, \lambda)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial L(x_1, x_2, \lambda)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial L(x_1, x_2, \lambda)}{\partial \lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4x_1 + \lambda \\ 1 + 2\lambda x_2 \\ x_1 + x_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{\lambda}{4} \\ x_2 = -\frac{1}{2\lambda} \\ \frac{-\lambda^3 + 1}{4\lambda^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{4} \\ x_2 = -\frac{1}{2} \\ \lambda = 1 \end{cases}$$

Condizione sufficiente (o del secondo ordine) gli zeri del determinante della matrice di hankok  $W$  debbono essere maggiori di zero (problema di minimo).

La matrice risulta essere

$$W(x_1, x_2, \lambda) = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} \end{bmatrix} - zI & \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1 + x_2^2}{\partial x_1} \\ \frac{\partial x_1 + x_2^2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1 + x_2^2}{\partial x_1} & \frac{\partial x_1 + x_2^2}{\partial x_2} \end{bmatrix} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 4-z & 0 \\ 0 & 2\lambda-z \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 2x_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2x_2 \end{bmatrix} & 0 \end{bmatrix}$$

Calcolata nell'unico zero del gradiente si ha che

$$W = \begin{bmatrix} 4-z & 0 & 1 \\ 0 & 2-z & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Il determinante possiede i seguenti zeri

$$\det(W) = -(1) \cdot (2-z) \cdot (1) - (-1) \cdot (-1) \cdot (4-z) = -(2-z) - (4-z) = -6 + 2z = 0 \Rightarrow z = 3$$

essendo lo zero positivo il problema di minimo ammette la soluzione

$$x_1 = -\frac{1}{4}, \quad x_2 = -\frac{1}{2}$$

### Esercizio 3 Ottimizzazione lineare

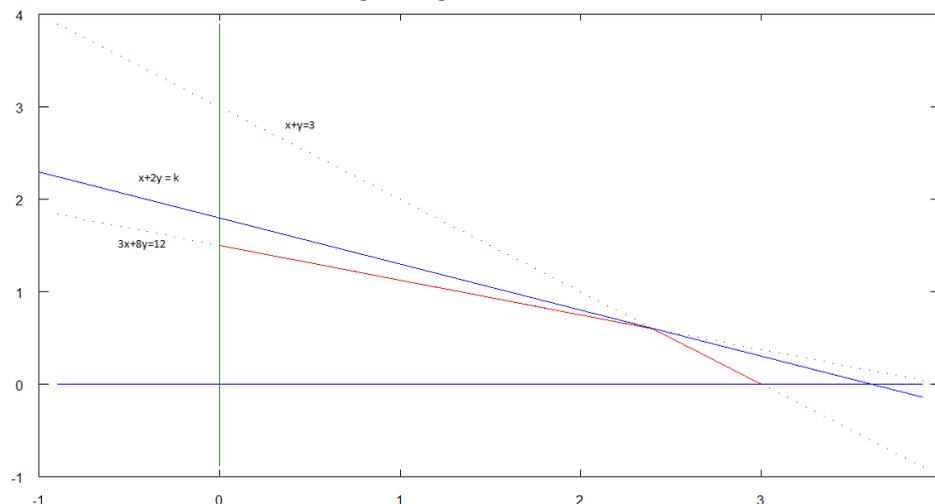
Analizzando il problema si nota come la variabile  $x_3$  sia di fatto coinvolta in soli due vincoli: quello di positività ed un limite superiore. Essa risulta quindi slegata dalle altre, pertanto possiamo assegnarle il valore che meglio si adatta ai nostri scopi fra quelli leciti ( $0 \leq x_3 \leq 10$ ). La variabile influisce in maniera diretta sul valore del funzionale che si deve massimizzare, pertanto la si porrà al proprio valore massimo ovvero

$$x_3 = 10$$

I valori delle altre incognite sono ottenibili risolvendo il problema ottenuto rimuovendo  $x_3$  dal problema originale:

$$\begin{aligned} & \arg \max && x_1 + 2x_2 \\ & x_1 + x_2 \leq 3 \\ & 3x_1 + 8x_2 \leq 12 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Il problema risulta lineare in due incognite e può venire facilmente risolto utilizzando il metodo grafico. Riportando il funzionale e zona di ammissibilità si ottiene il seguente grafico



da cui si evince come il punto (2.4 ; 0.6) sia soluzione del semplice. Per cui la soluzione del problema originario risulta essere

$$x_1 = 2.4 \quad x_2 = 0.6 \quad x_3 = 10$$

## La logistica del tè.

### 4.1 Modellazione del trasporto

La modellazione avviene per passi, identificazione delle variabili, dei vincoli e del funzionale di costo

*identificazione delle variabili.*

Analizzando il testo si vede chiaramente come il problema proposto sia un problema di trasporto a due stadi, avente la seguente dimensionalità:

- Sorgenti  $M = 2$  (nell'ordine: Darjeeling e Terai)
- Depositi intermedi  $P = 3$  (nell'ordine: Genova, Venezia, Roma)
- Destinazioni finali  $N = 3$  (nell'ordine: Venezia, Roma, Milano)

Questo problema è caratterizzato dalle seguenti  $P(N + M) = 15$  variabili

- 6 variabili  $x_{i,p}$  : quintali di tè trasportati dalla sorgente  $i$  al deposito intermedio  $p$ .
- 9 variabili  $y_{p,j}$  : quintali di tè trasportati dal deposito intermedio  $p$  alla destinazione  $j$

*identificazione dei vincoli.*

I vincoli, nei problemi di trasporto a due fasi sono di quattro tipi:

- 12 **Vincoli di positività**: non si possono muovere quantità negative  
 $x_{i,p}, y_{p,j} \geq 0$
- 2 **Vincoli di sorgente**: non si può prelevare dalla sorgente più di quanto vi sia. Nel caso in esame l'obiettivo è però di muovere tutta la quantità di merce presente nei porti, pertanto il vincolo si esprime come vincolo di somma:

$$\sum_{p=1}^P x_{1,p} = 8 \quad \text{e} \quad \sum_{p=1}^P x_{2,p} = 4$$

- 3 **Vincoli di domanda**: ad ogni destinazione finale deve giungere il corretto quantitativo di tè. (4 quintali per ogni destinazione)

$$\sum_{p=1}^P y_{p,j} = 4 \quad j = 1, 2, 3$$

- 3 **Vincoli di continuità del flusso**: in ogni deposito il quantitativo della merce entrante deve essere uguale a quello della merce uscente

$$\sum_{i=1}^2 x_{i,p} = \sum_{j=1}^3 y_{p,j} \quad p = 1, 2, 3$$

*identificazione del funzionale di costo*

Il funzionale di costo nient'altro è che il costo per unità di merce del trasporto, pertanto introdotte le seguenti matrici:

$$C = 10 \begin{bmatrix} 7441 & 6855 & 6978 \\ 9568 & 8982 & 9105 \end{bmatrix} \quad D = 4 \begin{bmatrix} 412 & 451 & 121 \\ 0 & 430 & 297 \\ 430 & 0 & 604 \end{bmatrix}$$

si ha che il funzionale di costo risulta essere

$$\left( \sum_{i=1}^2 \sum_{p=1}^3 C_{i,p} x_{i,p} \right) + \left( \sum_{p=1}^3 \sum_{j=1}^3 D_{p,j} y_{p,j} \right)$$

Quindi si ottiene il seguente problema di minimo:

$$\begin{aligned} & \arg \min && \left( \sum_{i=1}^2 \sum_{p=1}^3 C_{i,p} x_{i,p} \right) + \left( \sum_{p=1}^3 \sum_{j=1}^3 D_{p,i} y_{p,j} \right) \\ & \sum_{p=1}^3 x_{1,p} = 8 \\ & \sum_{p=1}^3 x_{2,p} = 4 \\ & \sum_{p=1}^3 y_{p,j} = 4 \quad j=1,2,3 \\ & \sum_{i=1}^2 x_{i,p} = \sum_{i=1}^3 y_{p,j} \quad p=1,2,3 \\ & x_{i,p}, y_{p,j} \geq 0 \end{aligned}$$

#### 4.2 Gestione delle scorte

Nel testo si richiede di utilizzare la teoria del del lotto economico per determinare la miglior politica di acquisti. Dall'analisi del testo si ricavano le seguenti informazioni nella simbologia del lotto economico dove utilizzeremo come unità di tempo il giorno, come unità di peso il kilogrammo e come unità di costo l'euro.

- $a$  : domanda costante = 10
- $K$  : setup-cost = 100
- $c$  : production cost irrilevante ai fini della richiesta.
- $h$  : holding cost = 0.2 = 6/30
- $p$  : shortage penalty = 2/30

Introducendo le grandezze

- $Q$  : quantità ordinata ogni ciclo
- $S$  : massima giacenza nel magazzino

Si ricava il seguente funzionale di costo

$$J(Q, S) = \frac{Ka}{Q} + ca + \frac{hS^2}{2Q} + p \frac{(Q-S)^2}{2Q}$$

Il cui valore minimo si ha per

$$\begin{aligned} \bar{Q} &= \sqrt{\frac{2aK}{h} \frac{p+h}{p}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10 \cdot 100}{\frac{2}{10}} \frac{\frac{6}{30} + \frac{2}{30}}{\frac{2}{30}}} = 100 \sqrt{\frac{8}{2}} = 200 \\ \bar{S} &= \sqrt{\frac{2aK}{h} \frac{p}{p+h}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10 \cdot 100}{\frac{2}{10}} \frac{\frac{2}{30}}{\frac{6}{30} + \frac{2}{30}}} = 100 \sqrt{\frac{2}{4}} = 50 \end{aligned}$$

Si noti come la giacenza massima imposta sia pari a 50 Kg quindi compatibile con i vincoli imposti dal problema.

Il ciclo ha durata pari a

$$\bar{\Delta} = \frac{\bar{Q}}{a} = \frac{200}{10} = 20 \text{ giorni}$$