Logistica (mn) – 6 CFU

Appello del 31 Marzo 2010

NOME: ______________________ COGNOME: _________________ MATR: ________

Avvertenze ed istruzioni:
- ✔ Il compito dura 2 ore e quindici.
- ✔ Non è permesso lasciare l'aula senza consegnare il compito o ritirarsi.
- ✔ Se dovessero mancare dati negli esercizi il candidato li derivi aggiungendo opportune ipotesi che debbono essere motivate ed indicate chiaramente nello svolgimento dell'esercizio.
- ✔ Laddove viene richiesta l'applicazione di uno o più aspetti teorici si richiede di indicare brevemente la teoria utilizzata.
- ✔ Si utilizza la convenzione di anno economico:tutti i mesi hanno 30 giorni (l'anno si compone di 360 gg.)

Esercizio 1. Teoria.
La teoria del lotto economico così come è stata vista a lezione può considerarsi un esempio di SCM? Motivare brevemente la risposta.

Esercizio 2. Ottimizzazione non lineare
Il candidato risolva il seguente problema di ottimizzazione

$$\underset{x_2=\sin(x_1)}{\arg\min} \quad x_1^2+\cos^2(x_1)+x_2^2$$

Esercizio 3. Caso reale: La catena delle manopole
3.1 Modellazione della produzione:
Una un'azienda fabbrica manopole in gomma per moto. Per semplicità supponiamo che queste manopole siano di due sole tipologie: manopola per l'acceleratore (dx) e di appoggio (sx).
La produzione si compone di due lavorazioni. Ogni lavorazione possiede un diverso costo orario e tempo di esecuzione, come indicato dalla tabella sottostante.

		Tipologia di prodotto		**Costo orario di lavorazione**
		dx	**sx**	
Lavorazione (20 unità)	**Stampo**	6 minuti	6 minuti	2 euro
	Finitura	3 minuti	15 minuti	4 euro
Prezzo di vendita (100 unità)		12 euro	26 euro	

Sapendo che l'azienda possiede un unica macchina per gli stampi e due diverse macchine per la finitura (ogni macchina per la finitura lavora sul proprio tipo di manopole e non è in grado di lavorare sull'altro) il candidato determini che tipo di produzione oraria l'azienda dovrebbe impostare per massimizzare l'utile orario.

Nota: In questo esercizio si considera il costo delle materie è costante ed indipendente da come si diversifica la produzione. Pertanto si ha che l'utile dovuto al singolo prodotto è espresso dalla seguente:

(prezzo di vendita – costo di lavorazione) * quantità prodotta

3.2) Determinazione della produzione ottimale

Si risolva il problema di produzione impostato nell'Esercizio 3.1. Utilizzando la tecnica di ottimizzazione più appropriata.

Se e solo se non si fosse risolto l'esercizio precedente, risolvere il seguente problema:

$$\arg\max \quad 15x_1 + 30x_2$$
$$x_1/2 + x_2/2 \leqslant 25$$
$$x_1 \leqslant 120$$
$$2x_2 \leqslant 40$$
$$x_{1,}\, x_2 \geqslant 0$$

3.3) Gestione delle scorte

In questo esercizio considereremo una rivendita per ricambi motociclistici.

La domanda di manopole (destre e sinistre) per motociclette si può considerare costante all'interno di due distinti periodi dell'anno: quello estivo e quello invernale. In particolare consideriamo il mercato delle manopole destre e supponiamo che nel periodo estivo (6 mesi) vengano vendute 5000 manopole mentre in quello invernale 300. L'acquisto di manopole da parte della rivendita è soggetto ad un costo fisso di 10 euro dovuto a spese di spedizione e di 20 centesimi a pezzo, mentre i costi di stoccaggio per 100 manopole sono di 2 euro mese. Sapendo che la rivendita applica la politica di scorte illimitate (ovvero senza rottura dello stock), il candidato valuti quale delle strategie seguenti risulti la più conveniente coerentemente con la teoria del lotto economico.

Strategia 1 effettuare un solo ordine per tutto l'anno effettuato all'inizio del periodo estivo.
Strategia 2 fare due ordini: uno relativo alla stagione estiva ed uno per la stagione invernale.

Svolgimento

Esercizio 2. Ottimizzazione non lineare
Il problema di minimo assegnato ha una regione di ammissibilità descritta mediante un vincolo di uguaglianza.
L'approccio classico utilizza la lagrangiana, e ne verifica le condizioni di primo e secondo ordine.
Lagrangiana

$$L(x_1, x_2, \lambda)=x_1^2+\cos^2(x_1)+x_2^2\lambda(x_2-\sin(x_1))$$

Condizione necessaria (o del primo ordine): annullamento del gradiente della Lagrangiana

$$\nabla L(x_1, x_2, \lambda)=\begin{bmatrix}\frac{\partial L(x_1, x_2, \lambda)}{\partial x_1}\\ \frac{\partial L(x_1, x_2, \lambda)}{\partial x_2}\\ \frac{\partial L(x_1, x_2, \lambda)}{\partial \lambda}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4x_1-2\cos(x_1)\sin(x_1)-\lambda\cos(x_1)\\ 2x_2+\lambda\\ x_2-\sin(x_1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}2x_1-2\cos(x_1)\sin(x_1)-(-2\sin(x_1))\cos(x_1)=0\\ \lambda=-2x_2=-2\sin(x_1)\\ x_2=\sin(x_1)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x_1=0\\ \lambda=0\\ x_2=0\end{cases}$$

Condizione sufficiente (o del secondo ordine) gli zeri del determinante della matrice di Hankock *W* debbono essere maggiori di zero (problema di minimo).

$$W(x_1, x_2, \lambda)=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 x_2}\\ \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 x_1 x_2}{\partial x_2^2}\end{bmatrix}-zI & \begin{bmatrix}\frac{\partial(x_2-\sin(x_1))}{\partial x_1}\\ \frac{\partial(x_2-\sin(x_1))}{\partial x_2}\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}\frac{\partial(x_2-\sin(x_1))}{\partial x_1} & \frac{\partial(x_2-\sin(x_1))}{\partial x_2}\end{bmatrix} & 0\end{bmatrix}=¿$$

$$\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}2-2\cos^2(x_1)+2\sin^2(x_1) & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}-zI & \begin{bmatrix}-\cos(x_1)\\ 1\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}-\cos(x_1) & 1\end{bmatrix} & 0\end{bmatrix}$$

Calcolata nell'unico zero del gradiente si ha che

$$W=\begin{bmatrix}-z & 0 & -1\\ 0 & 2-z & 1\\ -1 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

Il determinante risulta essere

$$det(W)=-(-1)\cdot(2-z)\cdot(-1)-(1)\cdot(1)\cdot(-z)=-(2-z)-(-z)=-2+2z$$

Imponendo l'annullamento del determinante si ottiene l'equazione $2z-2=0$ il che implica la presenza si un solo zero nel punto $z=1$. Essendo lo zero positivo, si ha che il problema di minimo ammetta la soluzione $x_1=x_2=0$

Esercizio 3.1
La modellazione avviene per passi, identificazione delle variabili, dei vincoli e del funzionale di costo

identificazione delle variabili.

Analizzando il testo si identificano chiaramente le seguenti variabili:

- x_1 : produzione oraria di blocchi di 100 manopole destre
- x_2 : produzione oraria di blocchi di 100 manopole sinistre

identificazione dei vincoli.
I vincoli, nei problemi di produzione sono dati dai tempi di lavorazione e dalle quantità prodotte.
Innanzi tutto le quantità prodotte non possono essere negative, pertanto si ha che $x_{1,} x_2 \geqslant 0$.
Poi si deve valutare il tempo in cui sono impiegate le macchine utilizzate nel processo produttivo. Avendo impostato come variabili la produzione oraria si valuterà l'uso orario delle macchine responsabili delle varie lavorazioni

- Vincolo 1: stampo: $6\frac{100}{20}x_1+6\frac{100}{20}x_2\leqslant 60 \Leftrightarrow x_1+x_2\leqslant 2$
- Vincolo 2: finitura (dx): $3\frac{100}{20}x_1\leqslant 60 \Leftrightarrow x_1\leqslant 4$
- Vincolo 3: finitura (sx): $15\frac{100}{20}x_2\leqslant 60 \Leftrightarrow 5\mathrm{x}_2\leqslant 4$

Si noti come la lavorazione di rifinitura essendo effettuata su due distinte macchine dia origine a due vincoli.

identificazione del funzionale di costo
Come primo passo si calcola il costo in euro di produzione delle varie tipologie di manopole

- destre (100 unità) $2\frac{6}{60}\cdot\frac{100}{20}+4\frac{3}{60}\cdot\frac{100}{20}=1+1=2$
- sinistre (100 unità) $2\frac{6}{60}\cdot\frac{100}{20}+4\frac{15}{60}\cdot\frac{100}{20}=1+5=6$

L'utilità (oraria) diviene la seguente.

$$(12-2)x_1+(26-6)x_2=10x_1+20x_2$$

Quindi si ottiene il seguente problema di massimo:

$$\arg\max \quad 10\mathrm{x}_1+20x_2$$

$$\begin{gathered} x_1+x_2\leqslant 2 \\ x_1\leqslant 4 \\ 5\mathrm{x}_2\leqslant 4 \\ x_{1,} x_2\geqslant 0 \end{gathered}$$

Ricordando che la soluzione di un problema di arg max è invariante rispetto a divisioni per una costante del funzionale di costo, ed osservando che il secondo vincolo è meno stringente del primo. Si perviene alla formulazione equivalente.

$$\arg\max \quad x_1+2x_2$$

$$\begin{gathered} x_1+x_2\leqslant 2 \\ x_2\leqslant 0.8 \\ x_{1,} x_2\geqslant 0 \end{gathered}$$

Esercizio 3.2
Il problema di programmazione lineare risulta molto semplice, essendo costituito da due incognite e da soli 2 vincoli (escluso quello di positività). Inoltre in questo problema la regione di ammissibilità risulta essere il quadrilatero OABC i cui vertici sono riportati nella Tabella 1.

Ricordando che in un problema di programmazione lineare la soluzione si trova in un punto di vertice della regione di ammissibilità, il metodo più efficiente per trovare il minimo del problema di programmazione lineare risulta essere quello del confronto.

Vertice	O	A	B	C
Coordinate	(0;0)	(2;0)	(1.2; 0.8)	(0; 0.8)
Funzionale di costo	0	2	3,8	1,6

Tabella 1 – Vertici della regione di ammissibilità e rispettivi valori del funzionale di costo

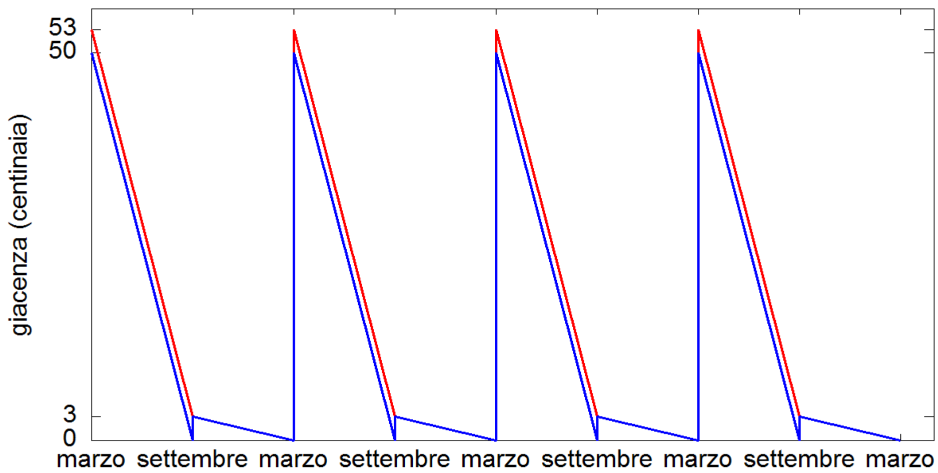
Pertanto la produzione ottimale richiede di produrre 120 manopole destre all'ora ed 80 manopole sinistre.

Esercizio 3.3
La teoria del lotto economico richiede vengano minimizzati i costi di gestione del magazzino. Pertanto per valutare quale sia la strategia migliore si debbono valutare i costi generati da ambo le soluzioni.

Analizzando il testo si ricavano i seguenti parametri uniformi nei costi (euro), tempi (mesi) e quantità (centinaia):

- **Domanda Estiva** = 50/6
- **Domanda Invernale** = 3/6
- **Costi fissi (setup cost) =** 10
- **Costi di produzione (production cost) unitario**= 20
- **Costi mantenimento (holding cost) unitario =** 2

Valutiamo ora i costi delle due strategie. Esse producono l'andamento delle scorte mostrato in figura



Strategia 1(linea Rossa)

- *Order cost = fisso + produzione = 10*1 + 20*(50+3) = 1070*
- *Holding Cost =(area sottesa dalla curva delle scorte)= (estivo)+(invernale) = (53+3) * 6 /2 + 3*6 /2 = 177*
- *Costo totale = ordine + mantenimento = 1070+177 = 1247*

Strategia 2 (Linea Blu)

- *Order cost = fisso + produzione = 10*2 + 20*50+ 20*3 = 1080*
- *Holding Cost = (area sottesa dalla curva delle scorte)= (estivo)+(invernale) = 50 * 6 /2 + 3*6 /2 = 159*
- *Costo totale = ordine + mantenimento = 1080+159 = 1239*

Si preferisce la Strategia 2, in quanto presenta un costo di gestione minore (anche se di poco).