Logistica - Metodi di ottimizzazione classica

Federico Di Palma

October 15, 2009

1 Preliminari

In questa sezione si forniscono alcune notazioni, definizioni e richiami matematici utili nel corso.

1.1 Insiemi

Nel seguito saranno impiegati i seguenti simboli

- R insieme dei numeri reali.
- N insieme dei numeri naturali.
- C insieme dei numeri complessi.
- $\mathcal{C}^n$ indica l'insieme delle funzioni continue e derivabili n volte. Ovviamente si ha che

$$\mathcal{C}^0 \supseteq \mathcal{C}^1 \supseteq \mathcal{C}^2 ...$$

1.2 Simboli

Salvo esplicita indicazione si avra sempre che:

- n, i, j, k, r, c indicano un numeri naturali.
- x rappresenta sia un vettore reale (avente dimensione qualunque anche unitaria).
- x_i rappresenta la componente i-sima del vettore x.

1.3 Definizioni

Intorno di un punto x**,** $I(x, \varepsilon)$ un intorno di un punto e' una palla aperta centrata in x di raggio $\varepsilon > 0$.

Frontiera di un insieme $F(K)$ dato un insieme $K \subset R^n$ un punto x appartiene alla frontiera di K se ogni possibile intorno di x é costituito sia da punti interni che esterni a K. Si deduce che la frontiera di un intervallo aperto coincide con la sua chiusura. La frontiera di un intervallo chiuso é rappresentato dai punti estremanti.

minimo globale Un punto $\bar{x} \in T$ é un punto di minimo globale di f su T se $f(\bar{x}) \leq f(x), \forall x \in T$.

minimo locale Un punto $x \in T$ é un punto di minimo locale di f su T se esiste un intorno circolare $I(\bar{x}, \varepsilon)$ di $\bar{x}$, avente raggio $\varepsilon > 0$ tale che $f(\bar{x}) \leq f(x), \forall x \in X \cap I(\bar{x}, \varepsilon)$.

Gradiente $\nabla f(x)$ Data una funzione f a valori reali ($f : R^n \mapsto R$) il vettore che ordinatamente raccoglie le derivate parziali si chiama Gradiente. Si ha che

$$\nabla f(x)_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} \Rightarrow \nabla f(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \dots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Hessiano $H(x)$ Data una funzione f a valori reali ($f : R^n \mapsto R$) il vettore che ordinatamente raccoglie le derivate seconde parziali si chiama Hessiano o matrice Hessiana. Si ha che

$$H(x)_{i,j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i, \partial x_j} \Rightarrow H(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

versore Vettore di norma 1. (Ovviamente il versore non può essere il vettore nullo poichè ha norma 0)

1.4 Richiami di calcolo matriciale

Una matrice può essere definita mediante una notazione prolissa o mediante la definizione del generico elemento $m_{i,j}$. Si ricorda che il primo indice (i) indica la riga mentre il secondo (j) la colonna. A tal proposito si considerino le seguenti definizioni equivalenti:

$$\begin{aligned} M &= \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \\ M &= [m_{i,j}] \texttt{ dove } m_{i,j} = i + j \texttt{ con } i = 1, 2; j = 1, .., 4 \end{aligned}$$

Nel Seguito verranno illustrate alcuni operatori e definizione utilizzate nel corso.

1.4.1 Matrici derivate

Una *sottomatrice* di una matrice $M_{n \times m}$ una matrice $B_{r \times s}$ ottenuta da M rimuovendo $n - r$ righe e m - s colonne.

Un *minore* una sottomatrice quadrata, cioè con $r = s$. Il numero r definito ordine del minore.

Un *minore complementare* un suo minore ottenuto togliendo una sola riga e una sola colonna. Il minore ottenuto togliendo l'i-esima riga e la j-esima colonna e si indica a volte con $M(i, j)$. Data le seguente matrice

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Si possono ottenere 9 diversi minori complementari pari al diverso numero di combinazioni possibili di righe e colonne. Seguono alcuni esempi.

$$M(1,1) = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{bmatrix} \text{ , } M(2,3) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

1.4.2 Determinante

In algebra lineare, il determinante una funzione che associa ad ogni matrice quadrata M uno scalare che ne sintetizza alcune proprietá algebriche. Data una matrice M quadrata il suo determinante si indica con $\Delta(M)$. Il calcolo del determinante può essere complesso. Si elencano due casi semplici ed una regola generale.

Determinante di una matrice 2 x 2

Data una matrice

$$M = \begin{bmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} \\ m_{2,1} & m_{2,2} \end{bmatrix}$$

si ha che

$$\Delta(M) = m_{1,1}m_{2,2} - m_{1,2}m_{2,1}$$

Determinante di una matrice 3 x 3

Data una matrice

$$M = \begin{bmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & m_{1,3} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & m_{2,3} \\ m_{3,1} & m_{3,2} & m_{3,3} \end{bmatrix}$$

si ha che

$$\begin{aligned} \Delta(M) \quad = \quad & m_{1,1}m_{2,2}m_{3,3} + m_{1,2}m_{2,3}m_{3,1} + m_{2,1}m_{3,2}m_{1,3} + \\ & -m_{1,3}m_{2,2}m_{3,1} - m_{1,2}m_{2,1}m_{3,3} - m_{2,3}m_{3,2}m_{1,1} \end{aligned}$$

Determinante di un una matrice di ordine qualsiasi Il calcolo di un determinante generico viene eseguito mediante l'applicazione del *Teorema di Laplace*. Prima di introdurre il la formula conviene richiamare la seguente definizione

Il prodotto $(-1)^{i+j}\Delta(M(i,j))$ é detto complemento algebrico dell'elemento $m_{i,j}$.

Il Teorema di Laplace afferma che il determinante di una matrice quadrata M pari alla somma dei prodotti degli elementi di una riga o colonna qualsiasi per i rispettivi complementi algebrici.

In formule si hanno le seguenti uguaglianze,

$$\begin{aligned}
\Delta(M) &= \sum_{j=1}^{n} m_{ij}\,(-1)^{i+j}\Delta(M(i,j)) \quad \textbf{,} \ \forall i \\
\Delta(M) &= \sum_{i=1}^{n} m_{ij}\,(-1)^{i+j}\Delta(M(i,j)) \quad \textbf{,} \ \forall j
\end{aligned}$$

Il teorema di Laplace indica che per calcolare il determinante di una matrice $n \times n$ basta saper calcolare il determinante di un minore di ordine $n-1$. Pertanto ricordando le formule riportate in precedenza é possibile calcolare il determinate di matrici di ordine qualsiasi. Il lettore consideri il seguente esempio.

Esempio 1 *Calcolare il determinante della matrice*

$$M = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 3 & -4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Per applicare la formula di Laplace si deve scegliere una riga. Considerando la natura della formula convene scegliere la riga con più zeri quindi la terza. La formula diviene quindi

$$\Delta(M) = \sum_{j=1}^{4} (-1)^{3+j} m_{3,j}\Delta(M(3,j))$$

solo i minori $M(3,3)$ e $M(3,4)$ danno contributo non nullo alla sommatoria pertanto si ha che

$$\begin{aligned}
\Delta(M) &= (-1)^{3+3}m_{3,3}\Delta(M(3,3)) + (-1)^{3+4}m_{3,4}\Delta(M(3,4)) = \\
&= 3\Delta\left(\begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 3 & -4 & 2 \end{bmatrix}\right) - 2\Delta\left(\begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 5 & 12 \\ 3 & -4 & 3 \end{bmatrix}\right)
\end{aligned}$$

il primo minore contiene una colonna con un solo termine non nullo. Pertanto conviene calcolarne il determinante utilizzando ancora la formula mentre il secondo può venir calcolato con la formula vista in precedenza. Si ottiene quindi che

$$\begin{aligned}
\Delta\left(\begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 3 & -4 & 2 \end{bmatrix}\right) &= 2*\Delta\left(\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}\right) = 2*(3*5-3*3) = 12 \\
\Delta\left(\begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 5 & 12 \\ 3 & -4 & 3 \end{bmatrix}\right) &= 3*5*3+3*12*3+3*(-4)*3+ \\
& -3*5*3-12*(-4)*3-3*3*3 = 189
\end{aligned}$$

Sostituendo questi risultati nella precendente si ottiene

$$\Delta(M) = 3*12-2*189 = -342$$

1.4.3 autovalori ed autovettori

Data una matrice quadrata M un autovalore λ è uno **scalare** per cui esiste un versore v tale che

$$Mv = \lambda v.$$

il versore v prende il nome di autovettore associato all'autovalore λ. Spesso la precedente condizione viene enunciata come $(\lambda I - M)v = 0$ dove I è la matrice identità di dimensioni opportune.

Si dimostrano le seguenti proprietà.

- Una matrice di dimensione $n \times n$ ha al più n autovalori distinti
- Il determinante é il prodotto degli autovalori
- la traccia é la somma degli autovalori.
- gli autovalori sono zeri del polinomio $P(\lambda) = \Delta(\lambda I - M)$.

Il polinomio $P(\lambda) = \Delta(\lambda I - M)$ prende il nome di **polinomio caratteristico** della matrice M.

2 Introduzione

I problemi di ottimizzazione si occupano di risolvere problemi di massimizzazione o minimizzazione di funzionali. e sono generalmente formulati secondo il seguente schema:

Data la funzione $f : T \mapsto R$ determinare il valore $\bar{x}$ tale che

$$f(\bar{x}) = \min_{x \in K} f(x)$$

. Una formulazione equivalente é

Data la funzione $f : T \mapsto R$ determinare

$$\bar{x} = \arg\min_{x \in K} f(x)$$

Qualora il problema di ottimizzazione si riferisse ad un ambito logistico o in generale industriale si adotta la seguente nomenclatura.

Vettore decisionale x in quanto contiene le scelte da ponderare mediante l'ottimizzazione.

T dominio in questo ambito si considera come dominio del funzionale f il semplice campo di esistenza della funzione: nessuna restrizione viene imposta sulla natura delle variabili decisionali.

K regione ammissibile questa regione rappresenta l'intersezione dei vincoli dettati dalle variabili decisionali. Ovviamente in un problema ben posto deve risultare $K \neq \emptyset$ e $K \subseteq T$.

$\bar{x}$ **punto di ottimo** Come spesso accade in problemi logistici il punto di ottimo non e' sempre unico.

L' approccio classico, ricerca condizioni sufficienti e/o necessarie per l'esistenza metodi risolutivi esatti.

I problemi di ottimizzazione vengono differenziati per la presenza di vincoli e per il numero di variabili decisionali. Si parla di problema *libero* qualora non sia presente alcuna restrizione del dominio e di problema *vincolato* in caso contrario. Per quanto riguarda la dimensione del vettore delle incognite, se fosse presente una sola incognita problema di ottimizzazione si dice *monovariato* diversamente si parla di problema *multivariato*

3 ottimizzazione monovariata libera

L'ottimizzazione classica in questo caso fornisce il seguente risultato.

Teorema 1 *Data una funzione obiettivo $f(x)$ della variabile decisionale x derivabile $n+1$ volte, se esiste un valore della variabile decisionale bar$x$, in corrispondenza del quale tutte le derivate fino allordine n-1, con $n > 1$, sono nulle e la* *derivata di ordine n diversa da zero (ovvero)*

$$f(x) \in \mathcal{C}^n, n > 1$$
$$\exists \bar{x} : f^i(\bar{x}) = 0, \forall i = 1, .., n-1$$

allora si ha che

- *Se n é dispari $\bar{x}$ é un punto di flesso*
- *Se n é pari e $f^n(\bar{x}) > 0$ $\bar{x}$ é un punto di minimo*
- *Se n é pari e $f^n(\bar{x}) < 0$ $\bar{x}$ é un punto di massimo*

Vediamo mediante due esempi come utilizzare questo teorema

Esempio 2 *Identificare i punti di massimo della funzione*

$$f(x) = 12x^5 - 45x^4 + 40x^3 + 5$$

. Valutiamo le derivate prima e seconda

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 60x^4 - 180x^3 + 120x^2 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= 240x^3 - 540x^2 + 240x \end{aligned}$$

Imponendo la derivata prima a zero si ha che

$$60x^4 - 180x^3 + 120x^2 = 0 \Leftrightarrow 60x^2(x^2 - 3x + 2) = 0 \Leftrightarrow 60x^2(x-1)(x-2) = 0$$

Valutando la derivata di ordine successivo nei tre zeri si ha che

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0) &= 0 \Rightarrow indefinito \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1) &= 240 - 540 + 240 = -60 \Rightarrow massimo \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2) &= 240 * 8 - 540 * 4 + 240 * 2 = 240 \Rightarrow minimo \end{aligned}$$

Per valutare la natura dell'origine debbo effettuare un altra derivazione. Ottengo cosi

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = 720x^2 - 1080x + 240$$

La funzione valutata in 2 risulta positiva. Poiché l'ordine di derivazione é dispari ($n = 3$) deduco che il punto $x = 0$ e di flesso (vedi Fig 1).

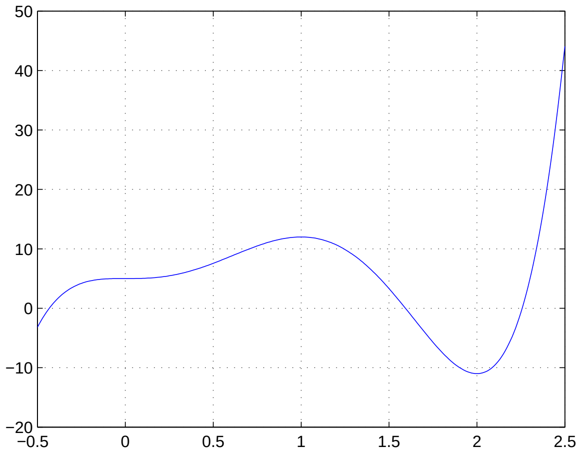

Figure 1: grafico funzione esercizio 1

4 problema multivariato

In questo caso non si ha un teorema generale come quello definito in precedenza. Si fornisce pero' una condizione sufficiente.

Per essi vale la seguente condizione necessaria.

Teorema 2 *in un punto di massimo (o minimo) $\bar{x}$ si ha che*

$$\nabla f(\bar{x}) = 0$$

Ovviamente questa é solo una condizione necessaria ma non sufficiente. Questo vuol dire che se tutti i punti che annullano il gradiente posso essere punti di massimo o minimo ma non é detto lo siano. La necessarietá ci dice peró che se il gradiente di una funzione non si annulla mai, non ci sono massimi o minimi.

Per verificare se un punto sia di massimo o di minimo possiamo utilizzare la seguente condizione sufficiente.

Teorema 3 *Se in corrispondenza di un vettore $\bar{x}$, il vettore gradiente della funzione obiettivo f(x) si annulla ($\nabla f(\bar{x})$) e se gli autovalori della matrice Hessiana calcolata in $\bar{x}$ sono tutti positivi o tutti negativi, allora il vettore $\bar{x}$ é, rispettivamente, minimo o massimo di $f(x)$. Se gli autovalori sono sia positivi che negativi il punto di $\bar{x}$ é un punto di sella.*

Si noti come la condizione necessaria non dica nulla qual'ora l'hessiana calcolata nei punti stazionari risultasse semi-definita negativa, semi-definita positiva ovvero esistesse un autovalore pari a zero.

Esempio 3 *Verificare l'esistenza di un punto di minimo relativo per la funzione* $f(x) = x_1^3 + x_2^2 - 3x_1 + 7$

Come prima cosa verifico la condizione necessaria (l'annullamento del gradiente). Il gradiente risulta essere

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x_2 - 3 \\ 2x_2 \end{bmatrix}$$

Pertanto ottengo che si annulla nei punti $\bar{x}_A = (-1, 0)$ e $\bar{x}_B = (1, 0)$.

Verifico se uno di questi due punti soddisfa la condizione sufficiente. Calcolo la matrice hessiana

$$H(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

e valuto nei due punti ottenuti. Verifico quindi l'enunciato.

5 problema vincolato

Nella loro forma canonica questa tipologia si presenta nella forma

$$\min_{x \in K} f(x)$$

In generale il problema si affronta secondo una semplice strategia. Si considerano separatamente la frontiera di K dai suoi punti interni. Si risolvono quindi due problemi

$$\begin{array}{cc|cc} \min & f(x) & \min & f(x) \\ g(x) = 0 & & h_1(x) < 0 & \\ \cdots & & & \\ g_{m_g}(x) = 0 & & h_{m_h}(x) < 0 & \\ & & & \\ \text{P1:} & \text{frontiera} & \text{P2:} & \text{punti interni} \end{array}$$

Supponendo x_g ed x_h gli ottimi dei problemi P1 e P2. Il minimo del problema principale viene determinato utilizzando il metodo del confronto. Ovvero si valuta il funzione in nelle soluzioni trovate e si sceglie quello che fornisce il valore minimo.

Possiamo quindi definire la seguente procedura

1. Risolvere il problema sulla frontiera ed identificare i punti di massimo/minimo X^f
2. Risolvere il problema non ed identificare i punti di massimo/minimo X^l
3. Identificare i punti X^i che sono soluzioni del problema libero e rispettano i vincoli $X^i = X^l \cap K$
4. valutare la funzione obiettivo sia in tutti i punti di X^i e di X^f e trovare i punti forniscono il valore massimo/ minimo del funzionale di costo.

Nel seguito forniremo dei metodi per risolvere i due problemi

5.1 Soluzione sull'insieme aperto

Consideriamo prima i punti interni. Se vi fosse in essi un massimo relativo questo deve essere individuato dai metodi non vincolati. Infatti poichè è possibile creare un intorno per ogni punto, si riesce a rispettare la condizione di primo ordine (il gradiente si annulla) e di secondo ordine (la definita positività o negatività dell'hessiano). Quindi si cerca il massimo o il minimo relativo con i metodi non vincolati e si verifica se esso appartiene ai punti interni del domino.

Consideriamo il seguente esempio.

Esempio 4 *si risolva il seguente problema di minimo vincolato.*

$$\min_{x_1^2+x_2^2<1} \quad x_1 x_2$$

Come primo punti si deve risolvere il problema non vincolato.

Si verifica facilmente che il gradiente si annulla in ogni punto appartenente ad uno degli assi cartesiani.

Per verificare se uno di questi punti sia estremante (i.e. o di massimo o di minimo) si deve valutare l'Hessiano. Si ha che

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Il cui polinomio caratteristico è $P(z) = z^2 - 1$. I due autovalori della matrice sono discordi. Pertanto il problema vincolato non ammette punti estremati. Questo ci autirizza a dire che anche il problem sull'aperto non ha massimi o minimi.

Esempio 5 *si risolva il seguente problema di minimo vincolato.*

$$\min_{x_1^2+2x_2>0} \quad x_1^3 + x_2^2 - 3x_1 + 7$$

Anche in questo caso come primo passo si ricercano le soluzioni del problema libero. Come mostrato nel Esempio 3 si vede come il punto $\bar{x} = (1, 0)$ sia un punto di minimo. Per vedere se tale punto di minimo appartenga anche al problema vincolato debbo vedere se esso soddisfa i vincoli. Valutando il vincolo in $\bar{x}$ si ha

$$\bar{x}_1^2 + 2\bar{x}_2 > 0 \Rightarrow 1 > 0$$

Il vincolo è soddisfatto pertanto il punto $\bar{x}$ è soluzione del problema vincolato.

5.2 Problema di minimo con vincoli di uguaglianza

Se i vincoli sono di uguaglianza ed il numero di vincoli è minore del numero delle incognite ($m_g < n$) è possibile definire delle condizioni analoghe a quelle presenti per i problemi non vincolati.

Entrambe le condizioni si basano sulla definizione di funzione lagrangiana sottoriportata.

Definizione 1 *Definito il problema di minimo vincolato P1, la funzione Lagrangiana associata al problema è data dalla somma della funzione da minimizzare ad una combinazione lineare dei vincoli di uguaglianza. In simboli*

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{m_g} \lambda_i g_i(x)$$

I coefficienti della combinazione lineare (λ_i) prendono il nome di moltiplicatori di Lagrange.

Si noti come la funzione Lagrangiana possieda $n + m_g$ incognite. n presenti nella funzione da massimizzare e m_g date dai moltiplicatori di Lagrange.

Definita la funzione lagrangiana è possibile enunciare la seguente condizione necessaria.

Teorema 4 *Posto $\bar{x}$ soluzione del problema minimo (o massimo) vincolato P1, esiste un valore dei coefficienti di fourier $\bar{\lambda}$ che annulla il gradiente della Lagrangiana associata a P1*

$$\nabla \mathcal{L}(\bar{x}, \bar{\lambda}) = 0$$

Essendo quella appena enunciata una condizione necessaria non ci permette di ottenere direttamente i punti di minimo ma ma ci consente di definire dei possibili candidati nei punti che annullano il gradiente della Lagrangiana. La necessarietá ci dice peró che se tale gradiente non si annulla mai, non ci sono massimi o minimi.

Prima di definire la condizione sufficiente dobbiamo introdurre la definizione di matrice di Hancock.

Definizione 2 *Data un problema di minimo P1 e supposto che il gradiente della Lagrangiana associata $\mathcal{L}(x, \lambda)$ si annulli per i valori $[\bar{x}, \bar{\lambda}]$, si definisce matrice di Hancock W associata al vettore $[\bar{x}, \bar{\lambda}]$ la seguente matrice a blocchi*

$$W(z) = \begin{bmatrix} H(x) - zI & B(x)^T \\ B(x) & 0 \end{bmatrix}$$

dove

z e una variabile complessa,

I è l'identità di dimensioni opportune,

$H = [h_{i,j}]$ é l'Hessiano della Lagrangiana ridotti alle prime n componenti e calcolato in $[\bar{x}, \bar{\lambda}]$ $h_{i,j} = \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{x}, \bar{\lambda})$

$B = [b_{i,j}]$ raccoglie i gradienti trasposti dei vincoli $b_{i,j} = \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(\bar{x}, \bar{\lambda})$

Definita la matrice di Hancock si ha il seguente risultato

Teorema 5 *Data un problema di minimo P1 e supposto che il gradiente della Lagrangiana associata $\mathcal{L}(x, \lambda)$ si annulli per i valori $[\bar{x}, \bar{\lambda}]$, si calcolino gli zeri del polinomio $P(z) = \Delta W(z)$. Si ha che*

- *se tutti gli zeri di $P(z)$ sono strettamente positivi allora $\bar{x}$ è un punto di minimo per il problema vincolato*
- *se tutti gli zeri di $P(z)$ sono strettamente negativi allora $\bar{x}$ è un punto di massimo per il problema vincolato*

Consideriamo qualche esempio.

Esempio 6 *Risolvere il seguente problema di minimo vincolato*

$$\begin{array}{cc} \min & x_1 x_2 \\ x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0 & \end{array}$$

Come prima cosa verifichiamo la condizione sufficiente.
Come primo passo definiamo la Lagramgiana

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = x_1 x_2 + \lambda(x_1^2 + x_2^2 - 1)$$

Il gradiente risulta

$$\nabla \mathcal{L}(x, \lambda) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 + 2\lambda x_1 \\ x_1 + 2\lambda x_2 \\ x_1^2 + x_2^2 - 1 \end{bmatrix}$$

Imponendo il gradiente a zero si ottiene il seguente sistema

$$\begin{cases} x_2 + 2\lambda x_1 = 0 \\ x_1 + 2\lambda x_2 = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 = 1 \end{cases}$$

Sommando le prime due equazioni si ottiene la seguente

$$x_2 + 2\lambda x_1 + x_1 + 2\lambda x_2 = 0 \Leftrightarrow x_2 + 2\lambda(x_1 + x_2) + x_1 = 0 \Leftrightarrow (2\lambda + 1)(x_1 + x_2) = 0$$

da cui si hanno 2 soluzioni $\lambda = -1/2$ e $x_1 = -x_2$.
Consideriamo la prima, dal precedente sistema si ha

$$\begin{cases} \lambda = -1/2 \\ x_1 - x_2 = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -1/2 \\ x_1 = x_2 \\ x_1^2 + x_1^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -1/2 \\ x_1 = x_2 \\ x_1^2 + x_1^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -1/2 \\ x_1 = x_2 \\ x_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

considerando $x_1 = -x_2$ otteniamo

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + 2\lambda x_2 = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 \\ -x_2 + 2\lambda x_2 = 0 \\ x_2^2 + x_2^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 \\ x_2(2\lambda - 1) = 0 \\ 2x_2^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 \\ \lambda = \frac{1}{2}) \\ x_2 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

In sostanza il gradiente della lagrangiana si annulla in 4 casi:

$$\begin{array}{cc} (x^a, \lambda^a) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}) & (x^b, \lambda^b) = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}) \\ (x^c, \lambda^c) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}) & (x^d, \lambda^d) = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}) \end{array}$$

Per verificare quali di questi sia un massimo od un minimo possiamo applicare il criterio di Hancock. Come prima cosa si calcolano le componenti delle matrici a blocchi.

$$
\begin{aligned}
H &= \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x_2^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\lambda & 1 \\ 1 & 2\lambda \end{bmatrix} \\
B &= \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 & 2x_2 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

La matrice di Hancock risulta

$$
W(z) = \begin{bmatrix} H(x) - zI & B(x)^T \\ B(x) & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\lambda - z & 1 & 2x_1 \\ 1 & 2\lambda - z & 2x_2 \\ 2x_1 & 2x_2 & 0 \end{bmatrix}
$$

avente polinomio caratteristico

$$
\begin{aligned}
P(z) &= (2\lambda - z) * (2\lambda - z) * 0 + 1 * (2x_2) * (2x_1) + 1 * (2x_2) * (2x_1) + \\
&\quad -(2x_1) * (2\lambda - z)(2x_1) - (2x_2) * (2x_2) * (2\lambda - z) - 1 * 1 * 0 \\
&= 8x_1 x_2 - 4x_1^2(2\lambda - z) - 4x_2^2(2\lambda - z) \\
&= 8x_1 x_2 - 4(x_1^2 + x_2^2)(2\lambda - z)
\end{aligned}
$$

Valutiamo gli zeri del polinomio nei 4 casi.

- $(x^a, \lambda^a) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\right)$.

  $$P(z) = 0 \Leftrightarrow 8\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}} - 4(\frac{1}{2} + \frac{1}{2})(2(-\frac{1}{2}) - z) = 0 \Leftrightarrow 4 - 4(-1 - z) = 0 \Leftrightarrow 8 + 4z = 0 \Leftrightarrow z = -2$$

  Da cui $x^a = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ è un massimo. Stesso risultato si ottiene per x^b

- $(x^c, \lambda^a) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$.

  $$P(z) = 0 \Leftrightarrow 8\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{-1}{\sqrt{2}} - 4(\frac{1}{2} + \frac{1}{2})(2(\frac{1}{2}) - z) = 0 \Leftrightarrow -4 - 4(1 - z) = 0 \Leftrightarrow -8 + 4z = 0 \Leftrightarrow z = 2$$

  Da cui $x^c = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ è un minimo. Stesso risultato si ottiene per x^d.

Esempio 7 *Risolvere il seguente problema di minimo vincolato*

$$
\begin{array}{cc}
\max & x_1 x_2 \\
x_1^2 + x_2^2 \leq 1 &
\end{array}
$$

L'esercizio viene svolto seguendo la procedura indicata al Paragrafo 5. Il primo punto é stato risolto nell' Esercizio 6 ottenendo

$$
X^f = \left\{ (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}) \right\}
$$

L'esercizio 3 ha mostrato che non esistono ottimo del problema libero: $X^l = \emptyset$. Quindi nemmeno posso esistere soluzioni sull'aperto $X^i = X^l \cup K = \emptyset$. Pertanto le soluzioni del problema vincolato si trovano solo sulla frontiere e sono descritte da X^f.