Logistica - La gestione del magazzino

Federico Di Palma

31 marzo 2010

1 La gestione delle scorte

In molti processi aziendali, produttivi e non, spesso risulta utile immagazzinare alcune quantità di materiali e/o di prodotti in previsione di un successivo utilizzo.

Generalmente la quantità immagazzinata non è costante nel tempo, pertanto la si indica come una funzione $G(t)$. Nel seguito l'andamento delle scorte verrà considerato sempre e solo a partire da un generico istante iniziale t_0. Per convenzione si pone $t_0 = 0$. Pertanto la funzione $G(t)$ verrà definita e studiata sempre per $t \geq 0$.

Generalmente le scorte $G(t)$ vengono incrementate mediante degli ordini o mediante della produzione interna. In questa sede non distingueremo i due casi e si utilizzerà il termine ordine per entrambe le situazioni.

La determinazione della *quantità* di merce da ordinare e di *quando* emettere l'ordine, saranno i principali obiettivi delle teorie studiate in questa sede.

1.1 domanda di magazzino

La giacenza $G(t)$ è soggetta a diminuzione in quanto utilizzata o venduta. Dal punto di vista logistico non interessa il motivo per cui la giacenza viene prelevata dal magazzino solo il fatto che essa sia destinata a diminuire. Nel seguito questa caratteristica verrà indicata mediante la domanda $D(t)$ che risulta sempre positiva e rappresenta la velocità istantanea di richiesta di magazzino. In assenza di ordini risulta chiara la seguente relazione:

$$D(t) = -\frac{\partial G(t)}{\partial t}$$

Il mantenimento di un magazzino, sebbene porti indubbi vantaggi economici, rappresenta sicuramente dei costi di diversa natura. Obiettivo di questa sezione è fornire degli strumenti che consentano di definire una politica di acquisti che di fatto renda minimi questi costi.

Prima di poter presentare alcun criterio di scelta questi costi vanno quantificati e definiti.

1.2 principali costi

I costi generalmente considerati nella gestione delle scorte sono molteplici. In questa sede si considera che le spese dovute al magazzino in un esercizio siano imputabili alle seguenti voci:

Costi dovuti all'ordine Ogni ordine ha un costo. Nello specifico il costo degli ordini eseguiti si considera composto da due voci:

- **setup cost** Ogni ordine effettuato ha un costo fisso indipendente dalla quantità di materiale ordinato. Ad esempio in Italia una fornitura pubblica viene fatta mediante gare d'appalto che hanno un costo. Altri casi di costi fissi sono per esempio le spese di spedizione che in molti casi sono costanti e non dipendono dalla quantità ordinata ma solo dal numero di ordini fatti nell'esercizio.

- **production cost** Costo della quantità di materiale acquistata. In un contesto reale questo costo dipende dalla quantità della merce acquistata secondo una funzione crescente, che potrebbe non essere lineare. Infatti potrebbero essere applicati degli sconti per alte quantità di merce ordinata.

holding cost costo del solo mantenimento nella merce in magazzino. Questa voce include diversi costi quali i costi derivanti dallimmobilizzo di capitali, affitto dei magazzini, assicurazioni, vigilanza, etc.

salvage value Alcune tipologie di merci sono deperibili e per essere mantenute nel tempo necessitano di alcune spese. In questa voce spesso si include la caduta di domanda del prodotto.

shortage penalty modella la perdita di credibilità nei confronti del rivenditore quando il magazzino risulta sprovvisto di un dato prodotto. Ovviamente maggiore è il tempo in cui il rivenditore rimane sprovvisto della merce maggiore è l'impatto di questa voce.

Tasso di sconto Questo costo tiene conto delle variazioni di valore della moneta. Esso è molto importante nella gestione sul lungo periodo del magazzino ma per periodi periodi di tempo brevi (inferiori ad un anno) solitamente si assume ininfluente.

In tutte le analisi fatte nel seguito i costi di salvage value e relativi alle fluttuazioni del tasso di sconto non verranno considerati. I costi sono quindi ridotti a tre componenti principali: il costo dell'ordine, quello di mantenimento ed il salvage penalty.

Osservazione 1 *Si noti come il costo totale del magazzino su di un intervallo temporale* t_1, t_2, *sebbene sia legato a vari fattori che possono avere ruolo più o meno importanti, non possa prescindere dall'andamento delle scorte* $G(t)$ *nel periodo in esame. Pertanto, per motivi di brevità indicheremo il suddetto costo come* $f(G(t), t_1, t_2)$

1.3 Ipotesi di lavoro

Lo shortage penalty riveste una particolare importanza nella gestione di magazzino: in alcuni casi aziendali potrebbe non essere considerato considerato accettabile (o non essere consentito) non soddisfare o differire un ordine. Questa situazione può addirittura essere prevista a livello contrattuale nella stipula di contratti di fornitura. Infatti, nella stipula di un contratto di forniture committente potrebbe richiedere al fornitore di evadere ogni ordine al massimo in tre giorni lavorativi e di impegnarsi a soddisfare una domanda annuale che oscilla fra un minimo ed un massimo. Il non attendere questo vincolo viene generalmente sanzionato con una penale e la rescissione del contratto. In questo caso diviene ovvio come l'opzione di non attendere o differire un ordine non sia di fatto praticabile.

Pertanto, definiremo due diverse ipotesi di lavoro. La prima detta ipotesi di *scorte illimitate* prevede che il magazzino non si svuoti mai completamente. Diversamente se fosse possibile differire o non attendere un ordine si parlerà di ipotesi di rottura dello stock (in inglese *out-of-stock*). Alcuni autori non introducono la dizione scorte illimitate, ma si limitano a dire se sia possibile o meno rompere lo stock.

2 Teoria del lotto economico

La teoria del lotto economico prevede che ogni ordine sia effettuato a magazzino vuoto. Il periodo temporale che intercorre fra due ordini viene detto *ciclo* (Δ). In Figura 1 viene riportato l'andamento delle scorte che seguono un ciclo di quattro mesi.

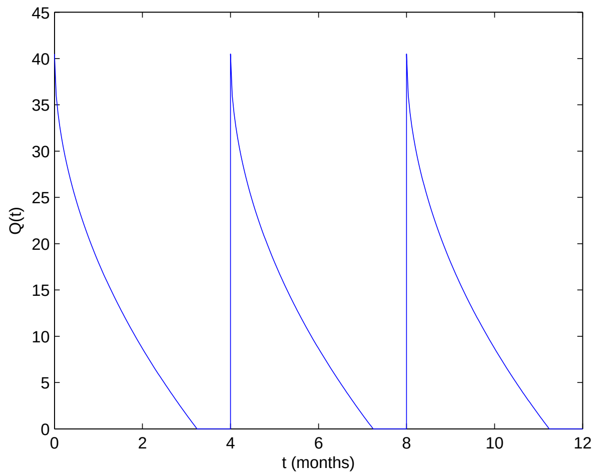

Figura 1: Esempio di andamento ciclico delle scorte, con ciclo di 4 mesi.

La teoria del lotto economico determina il ciclo ottimale e la quantità ottimale in modo da minimizzare *il costo medio di ciclo J*. Pertanto cerca di risolvere il seguente problema di ottimo vincolato

$$[\bar{Q}; \bar{\Delta}] = \arg\min_{Q,\Delta>0} J = \arg\min_{Q,\Delta>0} \frac{f(G(t), t_1, t_1 + \Delta)}{\Delta}$$

In ambito economico la quantità $\bar{Q}$ viene chiamata Economical Order Quantity (*EOQ*).

Il problema di ottimo appena definito nel caso più generale (f qualsiasi) potrebbe essere mal posto o peggio non risolvibile. Pertanto è prassi normale e necessaria introdurre delle ipotesi che semplifichino e limitino il problema in esame in modo da poter risolvere l'ottimizzazione.

2.1 Ipotesi semplificative

Generalmente la Teoria del lotto economico viene presentata sotto alcune ipotesi semplificative:

- Si considera un solo prodotto in gestione la cui giacenza viene indicata dalla funzione $G(t)$.
- Si modellano tutti i costi come funzioni lineari.
- Si considera la domanda costante nel tempo $D(t) = a$.

L'introduzione di queste ipotesi di fatto vincola la forma del funzionale di costo J e dell'andamento della giacenza di magazzino $G(t)$.

2.1.1 Formulazione dei principali costi di magazzino

L'ipotesi di linearità fa si che i costi descritti nella Sezione 1.2 siano completamente descritti mediante i seguenti coefficienti:

Costo fisso dell'ordine Questo costo, detto anche *set up cost* viene descritto dalla seguente costante:

K: costo fisso per ordine [Euro / numero di ordini]

production cost Il modello lineare adottato descrivere quest costo grazie alla costante:

c: unitario del prodotto [Euro / unità di prodotto]

holding cost La costante imposta del modello lineare è la seguent

h: costo unitario di magazzino [Euro/unità tempo*unità merce] si noti che questo costo è unitario sia nel tempo che nella quantità di merce. Pertanto il costo complessivo nell'intervallo temporale t_1, t_2 di questa voce dato dalla seguente:

$$\int_{t_1}^{t_2} hG(\tau)\partial\tau = h\int_{t_1}^{t_2} G(\tau)\partial\tau$$

shortage penalty Questo costo quantifica il danno procurato all'azienda dal non riuscire ad evadere una quantità di ordini. La costante che descrive questo costo è:

p: costo unitario di inevaso [Euro /(unità tempo* unità merce)]

Anche questo costo è unitario sia nel tempo che nella quantità di merce. Pertanto, indicando con $I(t)$ gli ordini inevasi al tempo t il valore della shortage penalty nell'intervallo temporale t_1, t_2 è dato dalla seguente:

$$\int_{t_1}^{t_2} pI(\tau)\partial\tau = p\int_{t_1}^{t_2} I(\tau)\partial\tau \tag{1}$$

2.1.2 Andamento della giacenza di magazzino

Imporre la domanda costante, fa si che, in assenza di ordini, le scorte $G(t)$ diminuiscano in maniera lineare con una pendenza pari a $-a$. Poichè la teoria del lotto economico prevede che gli ordini possano essere recepito solo a magazzino vuoto le scorte diminuiranno fino a quando la giacenza si annullerà.

Nel caso di possibile rottura dello stock il magazzino potrà restare vuoto e quindi permanere a zero per un po prima di fare l'ordine. Diversamente, in caso non possibile rottura dello stock l'ordine dovrà essere emesso non appena il magazzino si svuota. In ogni caso se nel magazzino la giacenza iniziale coincide con la quatità ordinata Q questa diminuirà secondo la eseguente legge

$$G(t) = Q - at. \tag{2}$$

Nel seguito vedremo come risolvere il problema di determinazione dell EOQ nelle due ipotesi di lavoro descritte in apertura.

2.2 Calcolo delle EOQ senza rottura dello stock

Sotto quest'ipotesi il magazzino viene riempito non appena la giacenza si annulla. Se l'ordine effettuato riporta la giacenza di magazzino al valore iniziale Q, si sviluppa un andamento ciclico. Ricordando la 2, la distanza fra i due ordini risulta essere pari a $\frac{Q}{a}$.

Si nota come in questo caso una volta determinata la quantità ottimale della merce da ordinare $\bar{Q}$ (quanto ordinare), la scadenza degli ordini (quando ordinare) si ottiene dalla

$$\Delta = \frac{\bar{Q}}{a} \tag{3}$$

come schematizzato in Figura 2

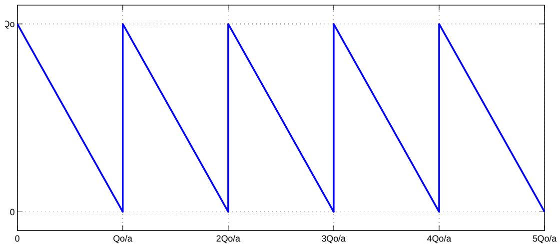

Figura 2: Andamento delle scorte nel modello di lotto economico senza rottura dello stock (magazzino illimitato)

2.2.1 Scrittura del funzionale di costo

La teoria del lotto economico si pone come obiettivo la minimizzazione delle spese medie sostenute nel generico ciclo $[t_1; t_1 + \Delta]$.

Poichè in un ciclo viene effettuato un solo ordine di quantità Q, il costo legato all'ordine risulta essere pari a $K \cdot 1 + c \cdot Q$.

Il costo di mantenimento (holding cost) diviene il seguente.

$$\begin{aligned}
h\int_{t_1}^{t_1+\Delta} G(\tau)\partial\tau &= h\int_{t_1}^{t_1+\Delta} Q - at\partial\tau = h\left[Qt - \frac{at^2}{2}\right]_{t_1}^{t_1+\frac{Q}{a}} = \\
&= h\left[t(Q - \frac{at}{2})\right]_{t_1}^{t_1+\frac{Q}{a}} = \\
&= h(t_1 + \frac{Q}{a} - t_1)(Q - \frac{a(t_1 + \frac{Q}{a} - t_1)}{2}) = \\
&= h\frac{Q}{a}(Q - \frac{a\frac{Q}{a}}{2}) = h\frac{Q}{a}(\frac{Q}{2}) = h\frac{Q^2}{2a}
\end{aligned}$$

Osservazione 2 *il risultato precedente potesse essere raggiunto in maniera più agevole semplicemente notando che il costo in esame coincide con l'area del triangolo di base Δ ed altezza Q*

L'ipotesi di disponibilità illimitata, rende nulla la domanda disattesa, pertanto il salvage cost è pari a zero.

Riassumendo sotto quest'ipotesi si ha il seguente funzionale di costo.

$$f(G(t), t_1, t_1 + \Delta) = K + cQ + h\frac{Q^2}{2a} \tag{4}$$

È importante notare come il funzionale di costo non sia definito per $Q = 0$. Questo indica che, almeno a livello di modellazione, scartiamo l'ipotesi di non tenere alcun magazzino (ovvero di aver un magazzino vuoto).

Osservazione 3 *Le ipotesi semplificative introdotte nel Paragrafo 2.1 fanno si che il costo di gestione di un ciclo dipenda solo dalla quantità da ordinata Q e rimanendo indipendente sia dalla durata del ciclo Δ e dal particolare intervallo di tempo considerato (t_1).*

Il funzionale di costo J diviene quindi:

$$J(Q) = \frac{K + cQ + h\frac{Q^2}{2a}}{\frac{Q}{a}} = \frac{Ka}{Q} + ac + h\frac{Q}{2} \tag{5}$$

2.2.2 Risoluzione del problema di minimo

La quantità ottima è quella che risolve il seguente problema di minimo vincolato.

$$\bar{Q} = \arg\min_{Q>0} J(Q) = \arg\min_{Q\geq 0} \frac{Ka}{Q} + ac + h\frac{Q}{2} \tag{6}$$

Quello impostato è un problema di massimo su di una regione di ammissibilità aperta. Le soluzioni di questo problema si ricavano scegliendo le soluzioni del problema non vicolato che rientrano nella regione di ammissibilità del problema.

Risolviamo il problema non vincolato, come primo passo si ricavano gli zeri del gradiente (condizione Necessaria)

$$\frac{\partial J(Q)}{\partial Q} = -\frac{Ka}{Q^2} + \frac{h}{2} = 0 \Leftrightarrow Q^2\frac{2Ka}{h} \Leftrightarrow Q = \pm\sqrt{\frac{2Ka}{h}}$$

Dei due zeri solo quello positivo rispetta la regione di ammissibilità.

La condizione sufficiente (o del secondo ordine) impone che la matrice hessiana nei punti di minimo sia definita positiva. In questo caso avendo una sola incognita, l'hessiana si riduce alla derivata seconda:

$$\frac{\partial^2 J(Q)}{\partial Q^2} = 2\frac{Ka}{Q^3}$$

che risulta avere segno positivo nella soluzione considerata. Pertanto, si ricava che la *EOQ* è la seguente

$$\bar{Q} = +\sqrt{\frac{2Ka}{h}} \tag{7}$$

cui corrisponde il ciclo di durata:

$$\bar{\Delta} = \frac{\bar{Q}}{a} = +\sqrt{\frac{2K}{ah}}$$

Osservazione 4 *Si noti come il costo del singolo pezzo non influisca sulla politica di gestione del magazzino.*

Sebbene la precedente osservazione possa sembrare illogica essa è il frutto diretto dell'ipotesi di linearità. Infatti sotto quest'ipotesi acquistare una singola unità di merce o un milione non riduce il costo di produzione che per tanto risulta indifferente nella gestione del magazzino. Nel prossimo Capitolo vedremo come questo non sia più vero nel momento in cui si applica una politica di sconto.

Esempio 1 *Una azienda che rivende pompe idrauliche per piscine ha una domanda annua costante pari a 10000 unità. La fornitura di pompe costa 5000 euro al pezzo con 10000 euro di spese fisse di trasporto. Il costo di mantenimento del magazzino è fondamentalmente dato dall'affitto del capannone che risulta essere di 200 euro trimestrali per metro quadro. Sapendo che in un metro quadro possono essere stoccate 10 pompe, determinare una politica efficiente di gestione del magazzino nell'ipotesi di scorte illimitate.*

come prima cosa si individuino le costanti del problema analizzando il testo:

Domanda Questa viene fornita su base annua e si ha $a = 1000$ unità / anno

Setup cost Le spese di spedizione fisse sono l'unica voce che rientra in questo costo. K = 10000.

Production cost In base all'osservazione 4 questo parametro sia inutile. Per completezza comunque si segnale che c = 5000.

Holding cost Poichè utiliziamo una domanda unitaria annua, il costo di mantenimento deve essere riportato al singolo articolo ed al singolo anno, pertanto si ha che $h = \frac{200 \cdot 4}{10} = 80$

Impostate le costanti si ha che la EOQ è

$$\bar{Q} = \sqrt{\frac{2Ka}{h}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10^4 \cdot 10^3}{80}} = \sqrt{\frac{10^6}{4}} = 500$$

cui corrisponde il seguente ciclo:

$$\bar{\Delta} = \frac{\bar{Q}}{a} = \frac{500}{1000} = \frac{1}{2}$$

Per tanto a questa azienda conviene effettuare due ordini ordine l'anno da 500 pezzi ognuno.
$\diamondsuit$

2.3 Calcolo della EOQ sotto l'ipotesi di out-of-stock

Nel paragrafo precedente, Q rappresenta la quantità di merce ordinata e coincideva con la giacenza di magazzino immediatamente dopo aver ricevuto l'ordine. Sotto l'ipotesi di possibile rottura dello stock, questo non é necessariamente vero. Infatti, se sono stati accumulati degli ordini inevasi, una parte di Q andrà impiegata per soddisfare gli ordini in sospeso. Pertanto, la giacenza di

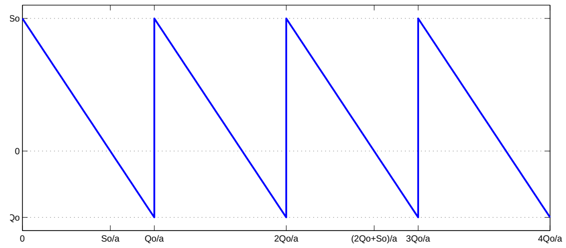

Figura 3: Andamento delle scorte nel modello di lotto economico con rottura dello stock. Si noti come la durata del ciclo sia sempre pari a Q/a anche se la giacenza ad inizio ciclo risulta minore.

magazzino dopo l'ordine sarà pari ad $S \leq Q$ (si ricorda che secondo la teoria del lotto economico l'ordine può essere effettuato solo a magazzino vuoto).

Nell'ipotesi di domanda costante, l'andamento delle scorte $G(t)$ risulta ancora essere lineare; inoltre le scorte si azzerano dopo un tempo $t_I = \frac{S}{a}$ dall'arrivo dell'ordine.

Generalmente, per monitorare la quantità di ordini inevasi nel tempo $I(t)$ si preferisce consentire alla giacenza di diventare negativa. Secondo questa convenzione, la quantità di inevasi sarà pari al valore assoluto della giacenza negativa, in simboli si ha:

$$I(t) = \max\{0, -G(t)\} = \max\{0, -(S - at)\} = \max\{0, at - S\}$$

Mentre lo scoperto massimo si ha alla fine del ciclo. Volendo mantenere la convezione $\Delta = \frac{Q}{a}$ il massimo valore di scoperto risulta essere

$$I(\Delta) = \max\{0, a\Delta - S\} = \max\{0, a\frac{Q}{a} - S\} = Q - S$$

Ricapitolando l'ipotesi di rottura dello stock di fatto viene modellata mediante due variabili: la giacenza massima di magazzino S e la quantità di merce da ordinare Q come riassunto in Figura 3.

2.4 modifica del funzionale di costo

Vediamo ora come la possibilità di rompere lo stock di fatto modifichi il funzionale di costo (4).

Il costo relativo all'ordine restano invariati. Infatti si effettua come prima un solo ordine di Q unità ogni $\Delta = \frac{Q}{a}$ unità di tempo.

Il costo di mantenimento cambia. Infatti esso deve essere calcolato non più su tutto il periodo ma solo nei primi t_I istanti di tempo. Si ha quindi che il suddetto costo è.

$$h \int_0^{t_I} G(\tau) \partial\tau = h\frac{S^2}{2a}$$

Il risultato ottenuto può essere facilmente verificato in base all'osservazione 2.

Poichè vi sono degli ordini inevasi si ha uno shortage penalty. Ricordando la (1) questo costo corrisponde all'area della parte negativa della domanda $G(t)$ presente in un solo ciclo. Anche in questo caso possiamo applicare l'osservazione 2 e ottere il seguente risultato

$$p\int_{t_I}^{\Delta} I(\tau)\partial\tau = p\frac{(Q-S)^2}{2a}$$

Pertanto il costo di gestione di magazzino relativo ad un ciclo risulta essere:

$$f_c = K + cQ + h\frac{S^2}{2a} + p\frac{(Q-S)^2}{2a}$$

Si ha quindi che il costo medio di ciclo risulta essere

$$J(Q,S) = \frac{f_c}{\frac{Q}{a}} = \frac{Ka}{Q} + ac + h\frac{S^2}{2Q} + p\frac{(Q-S)^2}{2Q}$$

2.5 Determinazione della strategia di gestione ottima

Ricordando che la teoria del lotto economico di fatto minimizza il costo medio di gestione del magazzino, per determinare la strategia ottima di gestione si deve risolvere il seguente problema di minimo:

$$[\bar{Q},\bar{S}] = \arg\min_{Q,S>0} J(Q,S) = \arg\min_{Q,S\geq 0} \frac{Ka}{Q} + h\frac{S^2}{2Q} + p\frac{(Q-S)^2}{2Q}.$$

Si dimostra che il problema di ottimizzazione ha la seguente soluzione

$$\begin{aligned} \bar{Q} &= \sqrt{\frac{2Ka}{h}}\sqrt{\frac{p+h}{p}} \\ \bar{S} &= \sqrt{\frac{2Ka}{h}}\sqrt{\frac{p}{p+h}} \end{aligned} \tag{8}$$

Da cui si desume che si debba effettuare un ordine di $\bar{Q}$ unità ogni

$$\bar{\Delta} = \frac{\bar{Q}}{a} = \sqrt{\frac{2K}{ah}\frac{p+h}{p}}$$

unità di tempo con una massima giacenza di $\bar{S}$ unità.

Confrontando la (7) con la (8) si vede come la *EOQ* calcolata sotto l'ipotesi di possibile rottura dello stock sia uguale a quella calcolata sotto l'ipotesi di scorte illimitate moltiplicata per il fattore $\sqrt{\frac{p+h}{p}}$; che risulta sempre maggiore di 1. Si motiva dunque la seguente osservazione:

Osservazione 5 *L'introduzione di un costo di storage penalty aumenta sempre la quantità da ordinare.*

Per mostrare la validità della precedente osservazione si consideri il seguente esempio:

Esempio 2 *Si consideri l'azienda descritta nell'Esempio 1. Supponendo che il si abbia un storage penalty pari annuo pari a 20 euro ogni 3 articoli non venduti, determinare la nuova politica ottimale.*

Nella risoluzione dell'esercizio precedente si erano ottenuti i seguenti valori.

K	a	c	h
10000	1000	5000	80

cui va aggiunto lo storage penalty $h = \frac{80}{3}$. Applicando la teoria del lotto economico si ottengono le seguenti quantità:

$$\bar{Q} = \sqrt{\frac{2Ka}{h}}\sqrt{\frac{p+h}{p}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10^4 \cdot 10^3}{80}}\sqrt{\frac{\frac{20}{3}+20}{\frac{20}{3}}} = \sqrt{\frac{10^6}{4}}\sqrt{\frac{80}{3}\frac{3}{20}} = 1000$$

$$\bar{S} = \sqrt{\frac{2Ka}{h}}\sqrt{\frac{p}{p+h}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10^4 \cdot 10^3}{80}}\sqrt{\frac{\frac{20}{3}}{\frac{20}{3}+20}} = \sqrt{\frac{10^6}{4}}\sqrt{\frac{20}{3}\frac{3}{80}} = 250$$

Quindi la teoria del lotto economico consiglia di utilizzare un solo ordine per esercizio e tenere come massima scorta 250 unità. Si preferisce quindi sopportare una perdita di credibilità (bassa in quanto il materiale di solito viene ordinato con molto anticipo) rispetto ad un elevato costo di mantenimento in magazzino. ♢

3 Applicazioni e Variazioni

Sebbene la teoria del lotto economico di basi su forti ipotesi restrittive, essa viene spesso utilizzata come base di partenza per effettuare scelte in casi più complessi. In particolare si vedrà come trattare una politica di sconto da parte del fornitore ed una domanda non costante. Entrambi i casi trattati si limiteranno alla sola ipotesi di scorte illimitate.

3.1 Sconti su quantità

Questa situazione, abbastanza frequente, si presenta quando il fornitore offre sconti sull'acquisto, al crescere della quanitità acquistata in base a tabelle del tipo:

Fascia di sconto	Quantità acquistata Q	prezzo unitario c
1	$Q < Q_1$	c_1
2	$Q_1 \leq Q < Q_2$	c_2
3	$Q_2 \leq Q < Q_3$	c_3
...	...	...
n	$Q_{n-1} \leq Q < Q_n$	c_n
n+1	$Q_n \leq Q$	c_{n+1}

In questo caso, l'ipotesi di linearità dei prezzi viene a mancare. Infatti si ha che il costo di produzione c risulta una funzione della quantità ordinta Q. In particolare si ha che

$$c(Q) = \begin{cases} c_1 & Q < Q_1 \\ c_2 & Q_1 \leq Q < Q_2 \\ \cdots & \cdots \\ c_n & Q_{n-1} \leq Q < Q_n \\ c_{n+1} & Q_n \leq Q \end{cases}$$

Vediamo ora come la violazione di quest'ipotesi modifichi il calcolo dell'EOQ nel caso di scorte illimitate.

Se tutti gli altri costi rispettano le condizioni di linearità, ripetendo i ragionamenti che hanno portato alla scrittura di della (5) si ottiene il seguente funzionale di costo

$$J(Q) = \begin{cases} \frac{Ka}{Q} + h\frac{Q}{2} + ac_1 & Q < Q_1 \\ \frac{Ka}{Q} + h\frac{Q}{2} + ac_2 & Q_1 \leq Q < Q_2 \\ \cdots & \cdots \\ \frac{Ka}{Q} + h\frac{Q}{2} + ac_n & Q_{n-1} \leq Q < Q_n \\ \frac{Ka}{Q} + h\frac{Q}{2} + ac_{n+1} & Q_n \leq Q \end{cases}$$

Il funzionale di costo si presenta come una funzione continua a tratti, il cui minimo rappresenta l *EOQ*. Considerando che le fasce di prezzo sono in genere in numero limitato, la strategia più efficiente per il calcolo del *EOQ* risulta quella del confronto. L'applicazione di questa strategia consiste nel determinare i punti di minimo di ogni tratto continuo e sceglie quello che presenta il minimo valore del funzionale.

Il calcolo dei punti di minimo dei vari tratti continui risulta molto semplificato dalle particolari proprietá del funzionale di costo $J(Q)$. Come chiaramente mostrato in Figura 4, si nota come il funzionale J venga ottenuto selezionando spezzoni continue dalle funzioni appartenenti al seguente fascio improprio di curve.

$$J(Q, c) = \frac{\alpha_1}{Q} + \alpha_2 Q + c$$

dove Q rappresenta la variabile indipendente, c il parametro del fascio, α_1 e α_2 delle costanti numeriche.

Il fascio $J(Q, c)$ gode di due importanti proprietà:

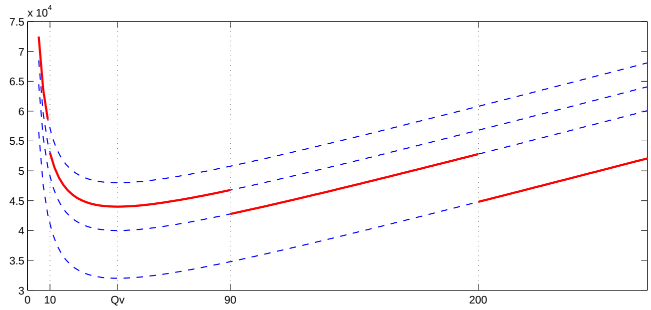

Figura 4: Funzionale di costo ($a = 40$, $K = 4000$, $h = 400$) relativo con 4 diversi tipi di nel caso di sconti sulle quantità. Si noti come tratti che compongono $J(Q)$ appartengano allo stesso fascio (improprio) di curve parallele, aventi tutti lo stesso vertice $Q_v = 40$.

1. tutte le curve componenti il fascio hanno il punto di minimo nello stesso valore di ascissa Q_v detto vertice del fascio.

2. tutte le curve avranno andamento decrescente per $Q < Q_v$ e crescente per $Q > Q_v$.

Alla luce di queste proprietà, il calcolo del minimo del funzionale ristretto ad un qualsiasi tratto continuo $I = [Q_a \, ; Q_b]$ diviene semplice. Infatti se il vertice appartiene all'intervallo ($Q_v \in I$) il minimo risulta essere ovviamente nel vertice; se questo fosse esterno il minimo si avrebbe nell'estremo dell'intervallo piú vicino a Q_v. Pertanto i valori minimi dei tratti continui che compongono $J(Q)$ possono essere ricavati semplicemente confrontando la posizione del vertice con il dominio dell'intervallo dato dalle fasce di sconto.

Applichiamo la strategia appena descritta ad un esempio.

Esempio 3 *Si consideri un azienda che produce memorie a semiconduttori. Nell'esercizio attuale (anno) l'azienda ha un contratto in esclusiva con un committente che garantisce una domanda costante di 2000 pezzi mese ma che non accetta ritardi di consegna superiori al mero tempo di produzione. Per quanto riguarda gli approvvigionamenti di materie prime, l'azienda ha stipulato un contratto di fornitura in esclusiva con un fornitore di silicio che pratica la seguente politica di vendita basta sui seguenti punti*

- *ogni ordine ha un costo di spese fisse pari a 10 euro*

- *il prezzo di vendita varia secondo la seguente tabella*

Quantitá acquistata Q	*prezzo unitario c*
$Q < 100$	*1 euro*
$100 \leq Q < 500$	*90 eurocent*
$500 \leq Q < 2000$	*85 eurocent*
$2000 \leq Q < 10000$	*75 eurocent*
$10000 \leq Q$	*65 eurocent*

Sapendo che i costi di stoccaggio dell'azienda A di 25 memorie sono di 12 Euro all'anno, determinare la politica di gestione del magazzino che minimizza le scorte.

Come primo passo rendiamo omogenee le grandezze in gioco, esprimendo la giacenza in centinaia, i prezzi in euro ed il tempo in mesi si ottengono i seguenti parametri:

Domanda $a = 20$

Costo di mantenimento $h = 4$

Costo fisso di ordine $K = 10$

Fasce di sconto 1:[0; 1], 2:[1; 5], 3:[5; 20], 4:[20, 100] 5:[100; ∞]

Da questi parametri si calcola facilmente l'equazione del fascio improprio

$$J(c, Q) = \frac{200}{Q} + 20c + 2Q$$

ed il vertice e la fascia di sconto ad esso associata

$$Q_v = \sqrt{\frac{2Ka}{h}} = \sqrt{\frac{400}{4}} = 10$$

Poiche il vertice si trova nella terza fascia di prezzo. Le fasce inferiori avranno il minimo nell'estremo destro(1 e 5), mentre in quelle superiore coinciderà con l'estremo sinistro (20 e 100). La tabella seguente riassume il calcolo dei rispettivi valori del funzionale di costo:

Fascia i	Q_i	c_i	$J(q_i)$
1	1	1	222
2	5	0.9	68
3	Q_v	0.85	67
4	20	0.75	65
5	100	0.6	214

Confrontando i valori del funzionale di costo, si desume chiaramente che il minimo del funzionale si ha per $\bar{Q} = 20$ centinaia $= 2000$.

$\diamondsuit$

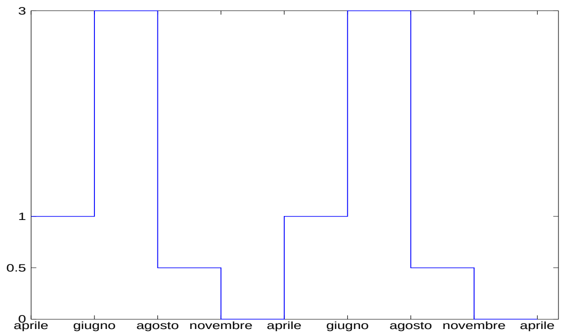

Figura 5: Ipotetica domanda stagionale di gelati.

3.2 Domanda variabile nel tempo

Per alcune categorie di merci, l'ipotesi di domanda costante potrebbe risultare troppo distante dalla realtà in particolare se si considerano situazioni di medio o lungo periodo. Un esempio tipico è rappresentato dai prodotti stagionali come ad esempio i gelati, la cui domanda risulta alta nel periodo estivo e cala nei mesi primaverili ed autunnali sino ad annullarsi in quelli invernali, come riportato in Figura 5.

In questo caso, il modello del lotto economico descritto sin ora risulta carente. La maggior mancanza risiede nel numero di incognite previste. Infatti il modello prevede solo due incognite: la quantitá da ordinare Q ed il periodo che intercorre fra i vari ordini Δ. Non viene data la possibilità di fare ordini con quantità diverse durante e nessun grado di libertà viene previsto per identificare lo specifico momento in cui ordinare. Questa scelta risulta ben posta e motivata nel caso di domanda costante (vedi osservazione 3), ma insufficiente in caso di domanda variabile dove potrebbe essere auspicabile fare ordini a diversa cadenza e di diversa entità. Riprendendo l'esempio dei prodotti stagionali, diviene chiaro che acquisire scorte di gelati in estate ha un impatto diverso che farlo in pieno inverno a causa della richiesta drammaticamente diversa.

Pertanto in questi casi si preferisce utilizzare un modello più ricco e basata sulle seguenti ipotesi:

1. La domanda $D(t)$ è costante a tratti e periodica di periodo Δ chiamato *ciclo*.

2. La giacenza alla fine di ogni ciclo deve essere nulla. In simboli

$$\lim_{t \to 0^-} G(t) = \lim_{t \to \Delta^-} G(t) = 0$$

3. La strategia di acquisto è anch'essa periodica di periodo Δ.

4. Durante il singolo periodo si effettuano n ordini con $nleqN$.

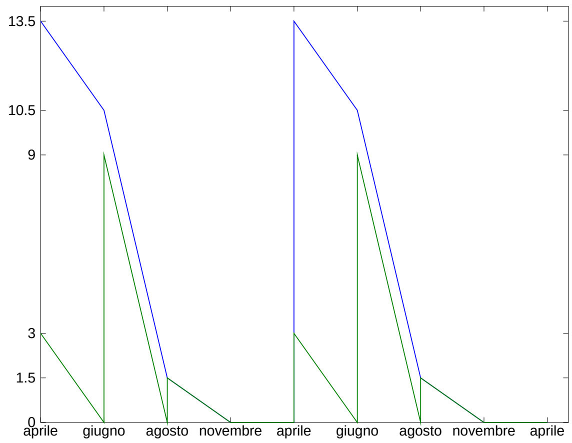

Figura 6: Andamento delle scorte applicando la strategia di ordini riportata in Tabella 1 (linea tratteggiata) e quella di ordine unico (linea continua) a fronte della domanda di Figura 5. Si noti come a valori diversi della domanda corrispondano pendenza diverse della curva di giacenza.

5. L'i-simo ordine all'interno di ogni ciclo viene eseguito dopo t_i unità di tempo ed è relativo ad una quantità q_i.

Il modello introdotto risulta molto ricco e consente di poter descrivere strategie complesse. Un esempio relativo al mercato dei gelati viene riportato dalla giacenza indicata in Figura 6 che viene generata da 3 ordini per periodo ($N = 3$) descritti dai seguenti parametri:

i	1	2	3	ordine
t_i	aprile	giugno	agosto	mese
q_i	3	9	1.5	Kg

Tabella 1: Possibile strategia per la domanda di Figura 5.

In Figura 6 viene mostrata l'andamento della giacenza nel caso si effettui un solo ordine. Ricordando che una funzione costante può essere vista come una funzione periodica di periodo qualsiasi, possiamo ricavare la seguente osservazione:

Osservazione 6 *Il modello del lotto economico è un caso particolare del modello appena descritto dove si pone* $N = 1$, $t_1 = 0$.

Il modello attuale consente di definire una ampia famiglia di strategie, rimane però il problema di come scegliere la strategia migliore. Il principio di utilizzare la strategia che minimizza il costo medio di gestione resta comunque solido. Pertanto un possibile approccio di ricerca della strategia migliore è la minimizzazione dei suddetti costi. Mantenendo le ipotesi di linearitá dei diversi costi di gestione del magazzino (e le relative le costanti c, h e K), si perviene al seguente funzionale

$$J = \frac{Kn + c\sum_{i=1}^{N} q_i + h\int_0^{\Delta} G(\tau)\tau}{\Delta}$$

dove i tre addendi presenti al numeratore rappresentano rispettivamente il setup cost, il production cost e l'holding cost mentre il denominatore rappresenta la durata del ciclo.

Quindi la strategia ottimale risulta essere quella che risolve il seguente problema di minimo:

$$\arg \min_{\substack{q_1, q_2, ..., q_N > 0 \\ t_1 \geq 0 \\ t_2 \geq t_1 \\ t_3 \geq t_2 \\ \Delta \geq t_N}} \frac{Kn + c\sum_{i=1}^{N} q_i + h\int_0^{\Delta} G(\tau)\tau}{\Delta}.$$

Purtroppo la soluzione del problema non risulta banale, infatti nemmeno il numero di incognite é fissato. Esso infatti dipende dal numero di ordini N. Ciononostante, il criterio di scelta da introdotto può essere utilizzato per confrontare differenti strategie di gestione.

Il seguente esempio mostra come il modello proposto possa essere utilizzato per valutare quale sia la strategia più efficace fra alcune proposte.

Esempio 4 *Un'azienda che rivende maglioni ha una domanda che si può considerare costante all'interno di due distinti periodi dell'anno: quello estivo e quello invernale. In particolare si suppone che nel periodo estivo (6 mesi) vengano venduti 300 maglioni mentre in quello invernale 5000. L'acquisto di maglioni da parte della rivendita è soggetto ad un costo fisso di 500 euro dovuto a spese di spedizione e di 20 euro a maglione, mentre i costi di stoccaggio per 100 maglioni sono di 2 euro mese.*

Imposto l'ipotesi di scorte illimitate, verificare quali delle due strategie di approvvigionamenti risulti più conveniente:

Strategia 1 *effettuare un solo ordine per tutto l'anno.*

Strategia 2 *fare due ordini: uno relativo alla stagione estiva ed uno per la stagione invernale.*

Dal testo si ricavano le seguenti grandezze omogenee in tempo (mese), quantità (centinaia) e costi (euro):

Domanda Estiva $a_E = \frac{3}{6} = 0.5$, invernale $a_I = \frac{30}{6} = 10$

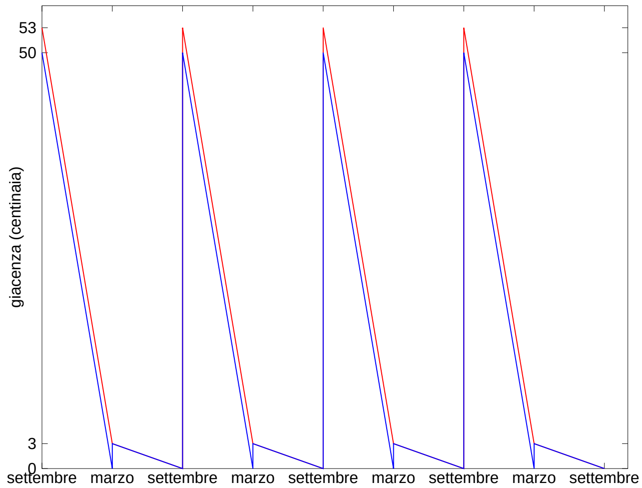

Figura 7: Andamento delle scorte nelle due strategie considerate nell'Esercizio 4. La strategia 1 (linea continua) prevede un solo ordine annuale, mentre la strategia 2 (linea tratteggiata) prevede un ordine all'inizio di ogni periodo del ciclo. Si noti come l'andamento delle scorte sia sovrapposto nell'ultimo periodo.

Costo di mantenimento $h = 2$

Costo fisso di ordine $K = 500$

Costo variabile di ordine $c = 20 * 100 = 2000$

Note queste costanti, le due strategie danno luogo agli andamenti delle scorte riportati in Figura 7 Per scegliere quale delle due strategie sia la migliore si deve valutare il funzionale di costo per tutte e due le strategie.

La prima strategia viene descritta dalle seguenti costanti

$$N = 1, \quad \Delta = 12, \quad q_1 = 50 + 3 = 53, \quad t_1 = 0$$

Per calcolare il valore del funzionale si deve calcolare il seguente integrale

$$\int_0^{12} G_1(\tau)\partial\tau = \int_0^{6} G_1(\tau)\partial\tau + \int_6^{12} G_1(\tau)\partial\tau = \frac{(53+3)\cdot 6}{2} + \frac{3\cdot 6}{2} = 177$$

ottenendo il seguente valore per il funzionale di costo

$$J_1 = \frac{500 \cdot 1 + 2000 \cdot 53 + 2 \cdot 177}{12} = 8904.5$$

La seconda strategia viene descritta dalle seguenti costanti

$$N = 2, \quad \Delta = 12, \quad q_1 = 50, \quad t_1 = 0 \quad q_2 = 3, \quad t_2 = 6$$

Per calcolare il valore del funzionale si deve calcolare il seguente integrale

$$\int_0^{12} G_2(\tau)\partial\tau = \int_0^{6} G_2(\tau)\partial\tau + \int_6^{12} G_2(\tau)\partial\tau = \frac{50 \cdot 6}{2} + \frac{3 \cdot 6}{2} = 159$$

ottenendo il seguente valore per il funzionale di costo

$$J_2 = \frac{500 \cdot 2 + 2000 \cdot 53 + 2 \cdot 159}{12} = 8949.17$$

Poichè $J_2 > J_1$ si preferisce la prima strategia alla seconda.

$\diamondsuit$