Logistica - Il problema del trasporto

Federico Di Palma

December 17, 2009

Il problema del trasporto sorge ogniqualvolta si debba movimentare della merce da una o più sorgenti verso una o più destinazioni finali. Questo problema è fra i primi ad essere stato studiato e formalizzato in ambito logistico. L'importanza di questo tipo di problematiche è tale che spesso con il termine logistica i più intendono proprio la definizione e la soluzione di tale tematica.

1 Il problema del trasporto ad uno stadio

Nella classica definizione del problema si trasporto si suppone di avere un numero M depositi in cui viene immagazzinato un prodotto e N negozi che richiedono tale prodotto. Il problema del trasporto consiste nel determinare quale quantità di prodotto inviare da ciascun deposito verso ciascun negozio in modo tale da minimizzare il costo complessivo di trasporto, rispettando i vincoli sulle quantità di prodotto presenti in ciascun deposito e quelli di richieste di ciascun negozio. Da questa semplice definizione si intuisce come il problema di trasporto presenti un alto numero di variabili decisionali. Infatti vi è una variabile per ogni possibile collegamento deposito-negozio. Nel seguito indicheremo quindi le variabili decisionali mediante la seguente notazione

$x_{i,j}$: quantità di merce trasportata dal magazzino i al deposito j.

Nella più comune formulazione, il problema di trasporto viene modellato come un problema di programmazione lineare (PL).

1.1 Formulazione lineare

Questa formulazione, si fonda su due ipotesi semplificative:

1. si suppone che sia possibile rifornire ogni negozio da ogni deposito, come mostrato in Figura 1.

2. il costo del trasporto dal magazzino i al venditore j si suppone proporzionale alla quantità di merce trasportata $x_{i,j}$ secondo una costante non negativa $c_{i,j}$.

Inoltre si suppongono note:

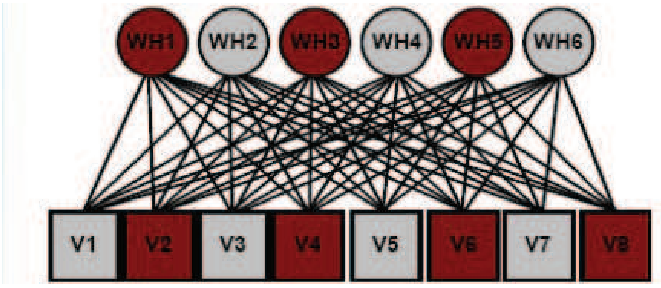

Figure 1: Situazione tipica del problema di trasporto. Ogni deposito (WH può rifornire ogni singolo negozio (V).

- la quantità di prodotto b_j richiesta da ognuno degli N negozi.
- la giacenza a_i presente in ognuno degli M magazzini.
- il costo di trasporto unitario $c_{i,j}$ per ognuno degli NM possibili collegamenti.

Alla luce delle due ipotesi fatte il costo complessivo del trasporto diviene esprimibile dalla seguente relazione

$$f = \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{N} c_{i,j} x_{i,j}$$

Sebbene sia i coefficienti che le variabili decisionali siano organizzate come delle matrici il funzionale di costo f è di tipo lineare. Per mostrare quanto detto è sufficiente riorganizzare le due grandezza in formato vettoriale. Infatti, introducendo il vettori colonna delle variabili decisionali

$$\widetilde{X} = \left[\begin{array}{ccccccccc} x_{1,1} & \dots & x_{1,N} & x_{2,1} & \dots & x_{2,N} & \dots & x_{M,1} & \dots & x_{M,N} \end{array}\right]^T$$

e dei termini di costo

$$\widetilde{C} = \left[\begin{array}{ccccccccc} c_{1,1} & \dots & c_{1,N} & x_{2,1} & \dots & c_{2,N} & \dots & c_{N,1} & \dots & c_{N,M} \end{array}\right]^T$$

la precedente diviene

$$f(\widetilde{X}) = \widetilde{C}^T \widetilde{X}$$

dove si nota chiaramente la natura lineare.

La formulazione lineare prevede inoltre che siano soddisfatti alcuni vincoli di buon senso.

Vincolo di non negaitività Le quantità trasportate debbono essere o nulle o positive.

$$x_{i,j} \geq 0 \ \forall i, j$$

Vincolo di rislubilità Un problema di trasporto è risolubile solo se la quantità di merce presente in tutti i magazzini è non inferiore a quella richiesta dal tutti i venditori. In formule si ha che:

$$\sum_{i=1}^{M} a_i \geq \sum_{j=1}^{N} b_i$$

Vincolo di capacità Da ogni magazzino non può essere prelevato più di quanto sia presente nel magazzino. Questo vincolo viene espresso mediante M equazioni lineari (una per ogni magazzino):

$$\sum_{j=1}^{N} x_{i,j} \leq a_i \ \forall i$$

Vincolo di domanda Ad ogni venditore deve giungere la quantità di prodotto richiesta. Questo vincolo viene espresso mediante N equazioni lineari (una per ogni venditore):

$$\sum_{i=1}^{M} x_{i,j} = b_j \ \forall j$$

Come si nota il vincolo di risulubitilità non comprende alcuna incognita e pertanto può essere verificato a priori.

Il problema diviene quindi facilmente formalizzabile come un problema di programmazione lineare.

$$\begin{array}{cc}
min & \widetilde{C}^T \widetilde{X} \\
\sum_{j=1}^{N} x_{1,j} \leq a_1 & \\
\dots & \\
\sum_{j=1}^{N} x_{M,1} \leq a_M & \\
\sum_{i=1}^{M} x_{i,1} = b_1 & \\
\dots & \\
\sum_{i=1}^{M} x_{i,N} = b_N & \\
x_{i,j} \geq 0 &
\end{array}$$

Si noti come un problema di trasporto con N depositi ed M venditori finali presenta sempre NM variabili decisionali, ed $N + M$ vincoli (esclusi i vincoli di positività).

Esempio 1 *Un rivenditore di zucchero possiede due magazzini di stoccaggio posti a Verona e Padova e tre punti vendita a Verona (coincidente con il magazzino) Venezia e Mantova. Nel mese in corso le giacenza di magazzino per i punti di stoccaggio di Verona e Padova sono rispettivamente di 2 e 3 Tonnellate e sono previste seguenti vendite: Verona 1,4 quintali, Mantova 1,3 quintali e Venezia 2 quintali. Sapendo che il costo di trasporto è di 1 centesimo al kilogrammo per kilometro percorso, impostare il problema di trasporto e verificarne la fattibilità note le distanze fra le città coinvolte.*

	Verona	*Mantova*	*Venezia*
Verona	*0*	*55*	*220*
Padova	*120*	*175*	*100*

Il problema di trasporto vede coinvolti due magazzini ($M = 2$) e tre negozi ($N = 3$), pertanto il problema possiede $NM = 6$ variabili decisionali $x_{i,j}$ indicanti la quantità di merce in kilogrammi trasferita fra il deposito i ed il punto di vendita j secondo la seguente tabella

	$Verona$	$Mantova$	$Venezia$
$Verona$	$x_{1,1}$	$x_{1,2}$	$x_{1,3}$
$Padova$	$x_{2,1}$	$x_{2,2}$	$x_{2,3}$

I corrispondenti coefficienti di costo $c_{i,j}$ sono dati dalla distanza in kilometri fra i ed il punto di vendita j per 0,01. Nel testo si ricavano i seguenti termini noti dei vincoli:

$$a_1 = 2000 \quad a_1 = 3000 \quad b_1 = 130 \quad b_2 = 140 \quad b_3 = 200$$

Il problema lineale diviene quindi:

$$\begin{array}{rl} min & 0x_{1,1} + 0,55x_{1,2} + 2,2x_{1,3} + 1,2x_{2,1} + 1,75x_{2,2} + x_{2,3} \\ x_{1,1} + x_{1,2} + x_{1,3} \leq 2000 & \\ x_{2,1} + x_{2,2} + x_{2,3} \leq 3000 & \\ x_{1,1} + x_{2,1} = 130 & \\ x_{1,2} + x_{2,2} = 140 & \\ x_{1,3} + x_{2,3} = 200 & \\ x_{i,j} \geq 0 & \end{array}$$

Per verificare l'esistenza di una soluzione basta controllare il vincolo di risulubilità che in questo problema diviene.

$$130 + 140 + 200 \leq 2000 + 3000$$

Il vincolo risulta soddisfatto pertanto il problema ammette soluzione.
$\diamondsuit$

1.2 formulazione non lineare

Spesso nella realtà il funzionale di costo difficilmente risulta lineare. Ad esempio, il corriere incaricato dell'offerta per una generica tratta $i-j$ a fronte di quantità di merce trasportata $x_{i,j}$ sostanziosa potrebbe diminuire il prezzo dell'unità di prodotto trasportata $c_{i,j}$. Pertanto, il costo del trasporto sulla tratta i,j non sarebbe più lineare.

Un modo per modellare questa situazione potrebbe essere (ma non è unico) di adottare un costo per la tratta $i-j$ del tipo

$$c'_{i,j}x^{\beta}, \quad 0 < \beta < 1$$

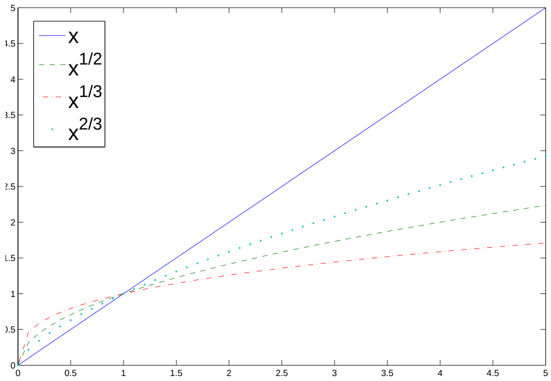

Figure 2: Confronto di possibili funzionali per il costo di trasporto in una singola tratta

Come mostrato dalla Figura 2, rispetto ad un funzionale lineare il funzionale proposto applica un costo maggiore alle basse quantità e minore per quelle elevate.

L'esempio considerato mostra solo una delle possibili fonti di non linearità presenti nella modellazione di un problema reale.

In ogni caso è bene notare che, comunque si modelli il problema di trasporto, la non linearità introdotta concerne solamente il funzionale di costo. Infatti, la tipologia di vincoli descritti nel caso lineare continuano ad essere validi e mantengono la loro natura lineare.

2 Il problema di trasporto a due stadi

Una variante del problema di trasporto particolarmente interessante è il cosiddetto problema del trasporto a due stadi; spesso chiamato problema di Transhipment.

Questo problema prevede che la merce da trasferire dai magazzini ai venditori debba necessariamente transitare per dei depositi intermedi P. Un esempio di tale situazione é il trasporto di una merce tra due continenti. In fatti in questa situazione le merci debbono giungere prima ad un porto (qualora il trasporto avvenisse via mare) od un aereoporto (qualora il trasporto avvenisse via aerea) e poi trasportate mediante corriere via terra alla destinazione finale.

La Figura 3 schematizza un problema di Transhipment con $M = 2$ stazioni di partenza $N = 2$ destinazioni e $P = 2$ depositi intermedi.

Anche il problema di Transhipment viene solitamente formulato come un problema di programmazione lineare (PL).

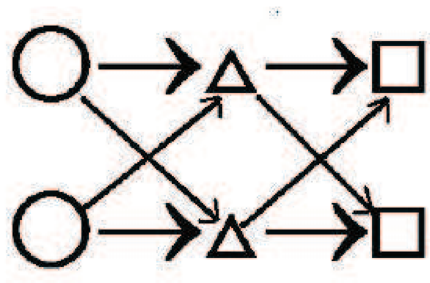

Figure 3: Esempio di problema di trasporto con $M = 2$ stazioni di partenza $N = 2$ destinazioni e $P = 2$ depositi intermedi.

2.1 Formulazione lineare

Questa formulazione sostanzialmente considera il problema di trasporto a due stadi come due problema di trasporto ad uno stadio connessi fra di loro in un unico PL. Il primo problema di trasporto determina le quantitá di merce $x_{i,j}$ trasferite dal i-simo magazzino al j-simo deposito intermedio, mentre il secondo trova la merce $y_{i,j}$ trasferita dal i-simo deposito intermedio al j-simo negozio. Ovviamente le ipotesi presentate al paragrafo 1.1 vanno considerate per ambo gli stadi del problema di Transhipment. Si ottengono quindi le seguenti ipotesi ipotesi semplificative:

1. si suppone che sia possibile rifornire ogni deposito intermedio da ogni magazzino.
2. il costo del trasporto dal magazzino i al deposito intermedio j si suppone proporzionale alla quantità di merce trasportata $x_{i,j}$ secondo una costante non negativa $c_{i,j}$.
3. si suppone che sia possibile rifornire ogni negozio da ogni deposito intermedio.
4. il costo del trasporto dal deposito intermedio i al venditore j si suppone proporzionale alla quantità di merce trasportata $y_{i,j}$ secondo una costante non negativa $d_{i,j}$.

Inoltre si suppongono note:

- la quantità di prodotto b_j richiesta da ognuno degli N negozi.
- la giacenza a_i presente in ognuno degli M magazzini.
- la capacità e_i massima per ognuno dei P depositi intermedi.
- il costo di trasporto unitario $c_{i,j}$ per ognuno degli MP possibili collegamenti magazzino - deposito intermedio.

- il costo di trasporto unitario $d_{i,j}$ per ognuno degli PN possibili collegamenti deposito intermedio - venditore.

Alla luce delle due ipotesi fatte il costo complessivo del trasporto diviene esprimibile dalla seguente relazione

$$f = \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{P} c_{i,j} x_{i,j} + \sum_{i=1}^{P} \sum_{j=1}^{N} d_{i,j} y_{i,j}$$

Anche in questo caso la natura lineare del funzionale di costo diviene ovvia a fronte di una riorganizzazione delle variabili decisionali e dei coefficienti di costo. Infatti, introducendo i vettori colonna delle variabili decisionali

$$\widetilde{X} = \begin{bmatrix} x_{1,1} & \dots & x_{1,P} & \dots & x_{M,P} & y_{1,1} & \dots & y_{1,N} & \dots & y_{P,N} \end{bmatrix}^T$$

e dei termini di costo

$$\widetilde{C} = \begin{bmatrix} c_{1,1} & \dots & c_{1,P} & \dots & c_{M,P} & d_{1,1} & \dots & d_{1,N} & \dots & d_{P,N} \end{bmatrix}^T$$

la precedente diviene

$$f(\widetilde{X}) = \widetilde{C}^T \widetilde{X}$$

dove si nota chiaramente la natura lineare.

I vincoli presenti nel problema di trasporto a due stadi non solo modellano le stesse caratteristiche presenti nei problema ad uno stadio ma vengono usati per i due problemi di trasporto ad uno stadio imponendo che nessuna merce si fermi nei depositi intermedi. Nella formulazione qui introdotta si hanno i seguenti vincoli:

Vincolo di non negaitività Le quantità trasportate debbono essere o nulle o positive, pertanto si ha che:

$$\begin{array}{rcll} x_{i,j} & \geq & 0 & i = 1, \dots, M \quad j = 1, \dots, P \\ y_{i,j} & \geq & 0 & i = 1, \dots, P \quad j = 1, \dots, N \end{array}$$

Vincolo di rislubilità Un problema di trasporto è risolubile solo se la quantità di merce presente in tutti i magazzini è non inferiore a quella richiesta dal tutti i venditori. In formule si ha che:

$$\sum_{i=1}^{M} a_i \geq \sum_{j=1}^{N} b_i$$

Vincolo di capacitá Da ogni possibile deposito non può essere prelevato più di quanto sia presente in esso. Questo vincolo viene espresso mediante $M+D$ equazioni lineari (una per ogni magazzino ed una per ogni deposito intermedio):

$$\sum_{j=1}^{P} x_{i,j} \leq a_j \quad i = 1, \dots, M \sum_{j=1}^{N} y_{i,j} \leq e_j \quad j = 1, \dots, P$$

Vincolo di domanda Ad ogni venditore deve giungere la quantità di prodotto richiesta. Questo vincolo viene espresso mediante N equazioni lineari (una per ogni venditore):

$$\sum_{j=1}^{N} y_{i,j} = b_j \qquad j = 1, \ldots, P$$

Vincolo di conservazione del flusso Nei depositi intermedi nulla deve fermarsi. Pertanto la somma delle quantità che entrano nel deposito debbono uscirne. Questo vincolo viene espresso mediante P equazioni lineari (una per ogni Deposito intermedio):

$$\sum_{i=1}^{M} x_{i,p} = \sum_{j=1}^{M} y_{p,i} \qquad p = 1, \ldots, P$$

Alla luce di quanto detto il problema di trasposto a due stadi si modella con il seguente PL: Il problema diviene quindi facilmente formalizzabile come un problema di programmazione lineare.

$$\begin{array}{cc}
min & \widetilde{C}^T \widetilde{X} \\
\sum_{j=1}^{P} x_{1,j} \leq a_1 & \\
\ldots & \\
\sum_{j=1}^{P} x_{M,1} \leq a_M & \\
\sum_{j=1}^{N} x_{1,j} \leq e_1 & \\
\ldots & \\
\sum_{j=1}^{N} x_{P,1} \leq e_P & \\
\sum_{i=1}^{P} y_{i,1} = b_1 & \\
\ldots & \\
\sum_{i=1}^{P} y_{i,N} = b_N & \\
\sum_{i=1}^{M} x_{i,1} = \sum_{j=1}^{M} y_{1,i} & \\
\ldots & \\
\sum_{i=1}^{M} x_{i,P} = \sum_{j=1}^{M} y_{P,i} & \\
x_{i,j} \geq 0 & \\
y_{i,j} \geq 0 &
\end{array}$$

Si noti come un problema di trasporto con M magazzini, P depositi intermedi ed M venditori finali presenti sempre $P(N + M)$ variabili decisionali, ed $N + M + 2P$ vincoli (esclusi i vincoli gli $P(N + M)$ positività).

2.2 Problemi non completamenti connessi

Nella realtà, spesso capita che non tutti i collegamenti siano praticabili, specialmente nei problemi di transhipment. Questo può essere imputabile a diverse cause: la non disponibilità della tratta ferroviaria, oppure la presenza di particolari embarghi economici, limitazioni dovute ad accordi internazionali etc..

Un importante conseguenza della non completa connessione del problema è che potrebbe accadere che le giacenza presenti in alcuni magazzini di partenza non possano raggiungere alcune destinazione finale. Questa semplice constatazione motiva il fatto che il vincolo di fattibilità non è più legittimato. Non è infatti possibile determinare la risolubitià del problema di trasporto non completamente connesso dalla sola analisi delle costanti a_i e b_j.

Il problema non completamente connesso víola una della ipotesi fatte in fase di modellazione. Ciononostante spesso si ricorre ugualmente alla formulazione lineare descritta in precedenza, supponendo i collegamenti "proibiti" come presenti ma aventi costo di trasporto arbitrariamente alto W. Infatti, se W fosse scelto sufficiente alto (idealmente infinito) la minimizzazione del funzionale impone che la quantità ad esso associata sia nulla. In questo caso, la soluzione del problema completamente connesso, non imponendo movimentazioni lungo tratte proibite, risulta ammissibile (ed ottima) anche per il problema di trasporto iniziale.

Pertanto, un modo di risolvere problemi non completamente connessi potrebbe essere quello di incrementare W fino a quando non si trova una soluzione ammissibile per il problema non connesso.

Il problema principale di questa tecnica è che l'algoritmo potrebbe non terminare. Infatti è possibile dimostrare che W esiste finito se e solo se il problema non completamente connesso ammette soluzione. Quindi generalmente si pone un massimo al numero di iterazioni previste Max_{iter}

Si perviene così al seguente algoritmo:

1. Si fissa W ad un valore alto
2. i = 1
3. Si imposta il funzionale di costo del PL completamente connesso
4. Se la soluzione trovata è applicabile al problema non connesso fine.
5. Se $i < Max_{iter}$
   (a) Si pone $W = 10W$
   (b) Si pone $i = i + 1$
6. Si torna al punto 3.