Stabilitá

Dato un sistema dinamico

$$\dot{x} = f(x(t)),\ x(t_0) = x_0$$

Definition 1 *Un equilibrio $\bar{x}$ si dice stabile se, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che per tutti gli stati iniziali x_0 che soddisfano la relazione*

$$\|x_0 - \bar{x}\| \leq \delta$$

risulti

$$\|x(t) - \bar{x}\| \leq \varepsilon$$

per tutti i $t \geq 0$. ■

Definition 2 *Un equilibrio $\bar{x}$ si dice instabile se non è stabile.*

Definition 3 *Un equilibrio $\bar{x}$ si dice asintoticamente stabile se, se è stabile e inoltre*

$$\lim_{t\to\infty} \|x(t) - \bar{x}\| = 0$$

Teorema di Lyapunov

Definition 4 *Una funzione $V(\cdot)$ si dice definita positiva (negativa) se esiste un intorno (circolare) dell'origine in cui $V(x) > (<) 0$ per $x \neq 0$ e $V(0) = 0$.*

Definition 5 *Una matrice quadrata e simmetrica P si dice definita positiva (negativa) se $V(x) = x'Px$ è una funzione definita positiva (negativa).*

Theorem 1 *C.N.E.S. perchè una matrice quadrata simmetrica di ordine n sia definita positiva è che siano positivi tutti gli n minori principali $D_1, \ldots, D_n$ da essa estraibili*

$$\begin{aligned} D_1 &= \det(p_{11}) \\ D_2 &= \det\left(\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}\right), D_j = \det\left(\begin{bmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1j} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{1j} & \ldots & p_{jj} \end{bmatrix}\right), j \leq n \end{aligned}$$

Theorem 2 *Sia $x = 0$ un punto di equilibrio per $\dot{x} = f(x(t))$. Sia V: $D \subset R^n \to R$ una funzione differenziabile con continuità, tale che*

$$\begin{aligned} V(0) &= 0 \text{ e } V(x) > 0 \text{ in } D - \{0\} \\ \dot{V}(x) &\leq 0 \text{ in } D \end{aligned}$$

Allora, $x = 0$ è un punto di equilibrio stabile. Inoltre, se

$$\dot{V}(x) < 0 \text{ in } D \text{ -}\{0\}$$

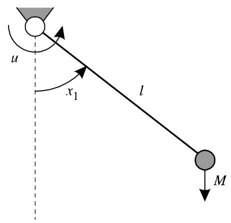
allora $x = 0$ è asintoticamente stabile.

Theorem 3 *Sia $x = 0$ un punto di equilibrio per $\dot{x} = f(x(t))$. Sia V: $D \subset R^n \to R$ una funzione differenziabile con continuità, tale che*

$$\begin{aligned} V(0) &= 0 \text{ e } V(x) > 0 \text{ in } D - \{0\} \\ \dot{V}(x) &> 0 \text{ in } D \end{aligned}$$

Allora, $x = 0$ è un punto di equilibrio instabile.

Pendolo



M = massa, l = lunghezza asta x_1 = posizione angolare rispetto alla verticale, x_2 la velocità angolare, coppia d'attrito proporzionale alla velocità angolare secondo un coefficiente d'attrito $k > 0$

$$Ml^2\ddot{\theta} = -k\dot{\theta} - M\,\lg\sin(\theta)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -\frac{g}{l}\sin(x_1(t)) - \frac{k}{Ml^2}x_2(t) \end{aligned}$$

dove g è l'accelerazione di gravità.

$$V(x) = \frac{g}{l}(1 - \cos x_1) + \frac{1}{2}x_2^2$$

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \frac{g}{l}\dot{x}_1\sin(x_1) + x_2\dot{x}_2 \\ &= \frac{g}{l}x_2\sin(x_1) - x_2\frac{g}{l}\sin(x_1) - \frac{k}{Ml^2}x_2^2(t) = -\frac{k}{Ml^2}x_2^2(t) \end{aligned}$$

Se $k = 0$ allora $\dot{V}(x) = 0$ quindi l'origine è stabile e non asintoticamente stabile.

Pendolo

Con $k > 0$ $\dot{V}(x)$ è semidefinita negativa perchè è indipendente da x_1. Quindi possiamo solo concludere che l'origine è stabile mentre l'intuizione ci dice che è asintoticamente stabile. Proviamo con un'altra funzione definita positiva.

$$\begin{aligned} V(x) &= \frac{g}{l}(1-\cos x_1) + \frac{1}{2}x'Px \\ &= \frac{g}{l}(1-\cos x_1) + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

dove P è una matrice definita positiva (i.e. $p_{11} > 0; p_{11}p_{22} - p_{12}^2 > 0$)

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= x^{'}P\dot{x} + \frac{g}{l}\sin x_1\dot{x}_1 = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} \\ &= \left[p_{11}x_1 + p_{12}x_2 + \frac{g}{l}\sin(x_1)\right]\dot{x}_1 + (p_{12}x_1 + p_{22}x_2)\dot{x}_2 \\ &= \left[p_{11}x_1 + p_{12}x_2 + \frac{g}{l}\sin(x_1)\right]x_2 \\ &\quad +(p_{12}x_1 + p_{22}x_2)\left(-\frac{g}{l}\sin(x_1) - \frac{k}{Ml^2}x_2\right) \\ &= -p_{12}\frac{g}{l}x_1\sin(x_1) + (p_{12} - p_{22}\frac{k}{Ml^2})x_2^2 \\ &\quad +(p_{11} - p_{12}\frac{k}{Ml^2})x_2 + (\frac{g}{l}\sin(x_1) - p_{22}\frac{g}{l}\sin(x_1))x_2 \end{aligned}$$

Con $p_{22} = 1$, (elimino $sin(x_1)x_2$) $p_{11} = p_{12}\frac{k}{Ml^2} > 0$ (elimino x_2 e rispetto def-pos 1), $p_{12} - p_{22}\frac{k}{Ml^2} < 0$ (negativo x_2^2), $0 < p_{12} < \frac{k}{Ml^2}$ (negativo x_1^2+condizione precedente), $p_{12}\frac{k}{Ml^2} - p_{12}^2 > 0$ (condizione def-pos 2 noti p_{11} e p_{22}), $p_{12} = 0.5\frac{k}{Ml^2}$

$$\dot{V}(x) = -0.5\frac{k}{Ml^2}\frac{g}{l}x_1\sin(x_1) - 0.5\frac{k}{Ml^2}x_2^2$$

Quindi poiché $x_1 sinx_1 > 0$ per $0 < |x_1| < \pi$, $V(x)$ soddisfa il Teorema di Lyapunov con $D = \left\{x \in R^2 | \, |x_1| < \pi\right\}$ e quindi l'origine è un punto di equilibrio asintoticamente stabile.

Teorema di Lyapunov per sistemi lineari

Theorem 4 *Un sistema lineare e invariante è asintoticamente stabile se e solo se per ogni matrice simmetrica e definita positiva Q esiste una matrice simmetrica definita positiva P che soddisfa l'equazione di Lyapunov*

$$PA + A'P = -Q$$

Inoltre , se il sistema è asintoticamente stabile, allora P è l'unica soluzione.

Nota che $V(x) = x'Px$ è una funzione di Lyapunov per il sistema $\dot{x} = Ax$. Infatti

$$\dot{V}(x) = x'PAx + x'A'P.x = x'(PA + A'P)x = -x'Qx$$

Esempio

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 - 3x_2 \\ \dot{x}_2 = 4x_1 - 2x_2 \end{cases}$$

Studiare la stabilità con l'equazione di Lyapunov

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}, Q = I$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} = -I$$

$$\begin{bmatrix} -2a + 4b - 2a + 4b & -2b + 4c - 3a - 2b \\ -3a - 2b - 2b + 4c & -3b - 2c - 3b - 2c \end{bmatrix} = -I$$

$$\begin{cases} -4a + 8b = -1 \\ -4b + 4c - 3a = 0 \\ -6b - 4c = -1 \end{cases} \begin{cases} a = \frac{1+8b}{4} \\ c = \frac{1-6b}{4} \\ -4b + 1 - 6b - \frac{3}{4}(1 + 8b) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -16b + \dfrac{1}{4} = 0 \end{cases} \begin{cases} b = \frac{1}{64} \\ a = \frac{9}{32} \\ c = \frac{58}{64*4} = \frac{29}{128} \end{cases}$$

$$P = \frac{1}{128} \begin{bmatrix} 36 & 2 \\ 2 & 29 \end{bmatrix} > 0 \Rightarrow As.Stabile$$

$$P = Lyap(A', Q)$$